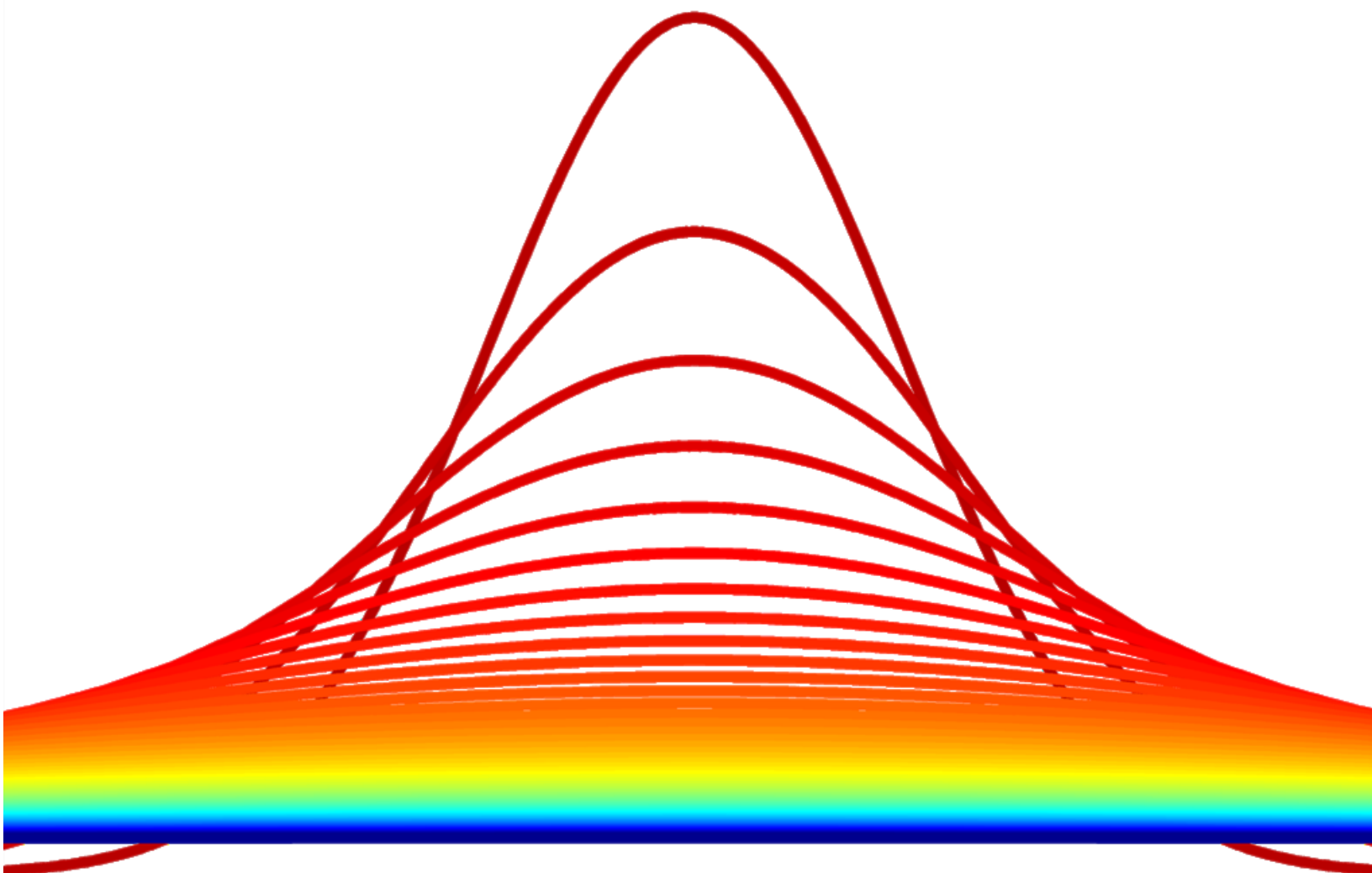


UDŽBENIK ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA U BEOGRADU

Metode i instrumentacija za električna merenja

Nadica Miljković



Beograd, 2016.

dr Nadica Miljković, docent

Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet

e-mail: nadica.miljkovic@etf.rs

METODE I INSTRUMENTACIJA ZA ELEKTRIČNA MERENJA

elektronski udžbenik

Recenzenti

dr Željko Đurović, redovni profesor

dr Predrag Pejović, redovni profesor

Nastavno-naučno veće Elektrotehničkog fakulteta odobrilo je objavljivanje ovog udžbenika odlukom broj 16 od 21.04.2016. godine na 798. sednici.

Izdavač:

Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu

Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Beograd, Srbija

ISBN: 978-86-7225-057-2



Neka prava zadržana. Ovo delo je licencirano pod uslovima licence [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

"Engineers like to solve problems.

*If there are no problems handily available, they will create their own problems."*¹

Scott Adams

¹ Inženjeri vole da rešavaju probleme. Ako nema problema koji su na raspolaganju, oni će ih sami kreirati. (slobodan prevod sa engleskog jezika). JAC Scott Adams. (n.d.). BrainyQuote.com. Retrieved April 10, 2016, from BrainyQuote.com Web site: <http://www.brainyquote.com/quotes/quotes/s/scottadams126696.html>

PREDGOVOR

Električna merenja predstavljaju značajan alat u savremenoj elektrotehnici i računarstvu. Ova oblast se izučava na više usmerenja na Elektrotehničkom fakultetu na Univerzitetu u Beogradu.

Udžbenik je namenjen studentima koji slušaju predmet Električna merenja na osnovnim akademskim studijama na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu (na sledećim izbornim područjima - modulima: Signali i sistemi, Elektronika, Telekomunikacije i informacione tehnologije, Fizička elektronika i Računarska tehnika i informatika), ali i inženjerima koji u svojoj praksi mere električne signale. Gradivo u ovoj knjizi pokriva deo kursa Električna merenja koji se odnosi na mernu nesigurnost, metode i instrumentaciju za merenje električnih veličina, kao i na metode merenja zasnovane na primeni računara.

Elektronski udžbenik je organizovan tako da sadrži niz *hyperlink*-ova koje čitalac može aktivirati za dodatne informacije. *Hyperlink*-ovi su preusmereni ka [Wikipedia](#) stranicama po izboru Autora ili ka sajtovima programa / električnih komponenti i drugih. Udžbenik sadrži i prevode naziva pojedinih komponenti, električnih kola i metoda na engleskom jeziku sa ciljem jednostavnijeg praćenja literature koja je napisana na engleskom jeziku.

Sve šeme električnih kola u ovom udžbeniku složene su u programu [Scheme-it](#) (Digikey Electronics, USA), a grafici svih signala su pripremljeni u programskom okruženju [Matlab](#) (Mathworks, Natick, USA). Kad god je to bilo moguće, Autor je koristio merene signale.

Autor se zahvaljuje svim profesorima i kolegama koji su učestvovali u dosadašnjem izvođenju nastave na ovom predmetu i svojim zalaganjem doprineli kontinuiranom unapređenju nastavnih metoda i sredstava.

Posebnu zahvalnost za nesebičnu podršku, ljubazne savete tokom pisanja ovog udžbenika, niz korisnih preporuka prilikom odabira literature i za korektnu saradnju na predmetu Električna merenja, Autor duguje dr Predragu Pejoviću, redovnom profesoru na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu.

Autor, u Beogradu, 7. april 2016. godine

SADRŽAJ

1	DEFINICIJA MERENJA.....	8
1.1	Rezultat merenja	8
1.1.1	Funkcija raspodele verovatnoće i funkcija gustine verovatnoće.....	14
2	MERNE GREŠKE I MERNNA NESIGURNOST	21
2.1	Relativna i apsolutna greška merenja.....	24
2.2	Merna nesigurnost tipa A	26
2.2.1	Merna nesigurnost tipa A za Gausovu funkciju gustine verovatnoće.....	30
2.2.2	Merna nesigurnost tipa A za negausovske funkcije gustine verovatnoće	31
2.2.3	Primeri računanja merne nesigurnosti tipa A.....	42
2.3	Merna nesigurnost tipa B.....	51
2.3.1	Merna nesigurnost tipa B analognih instrumenata	52
2.3.2	Merna nesigurnost tipa B digitalnih instrumenata.....	53
2.3.3	Normalizacija rezultata merenja.....	57
2.4	Kombinovana merna nesigurnost	59
2.4.1	Kombinovana merna nesigurnost nekorelisanih veličina	60
2.4.2	Kombinovana merna nesigurnost korelisanih veličina	63
2.4.3	Kombinovana merna nesigurnost i sistematski efekti	65
2.4.4	Primer računanja kombinovane merne nesigurnosti	66
2.5	Izveštaj rezultata merenja i uticaj merene veličine na mernu nesigurnost	67
2.6	Merna nesigurnost - dodatna razmatranja i rezime.....	69
2.6.1	Predstavljanje rezultata merenja pomoću medijane i kvartila.....	71
3	METODE ZA MERENJE ELEKTRIČNIH VELIČINA	74
3.1	Merenje otpornosti	74
3.1.1	Ommetar (digitalni multimeter)	75
3.1.2	U / I metoda za merenje nepoznate otpornosti	78
3.1.3	Merenje otpornosti metodom poređenja i metodom zamene.....	80
3.1.4	Primer merenja otpornosti.....	82

3.2	Merenje kapacitivnosti	83
3.2.1	Primer merenja kapacitivnosti	86
3.3	Merenje induktivnosti	89
3.4	Merenje impedanse.....	90
3.4.1	U / I metoda za merenje impedanse	95
3.5	Merni mostovi za merenje električnih veličina	96
4	INSTRUMENTI ZA MERENJE ELEKTRIČNIH VELIČINA.....	97
4.1	Princip rada osnovnih mernih instrumenata	97
4.1.1	Instrument sa pokretnim kalemom	98
4.1.2	Instrument sa pokretnim gvoždem.....	111
4.1.3	Princip rada digitalnih instrumenata	114
4.1.4	Galvanometri u savremenim električnim merenjima	117
4.2	Karakteristike mernih instrumenata.....	119
4.3	Specijalizovani merni instrumenti	124
4.3.1	Digitalni multimetar	124
4.3.2	Osciloskop	126
4.3.3	LCR metar	127
5	MERENJE NEELEKTRIČNIH VELIČINA	136
5.1	Princip rada senzora / pretvarača	137
5.1.1	Merenje promene otpornosti.....	137
5.2	Primeri sa rešenjima	139
5.2.1	NTC termistor	139
5.2.2	PTC termistor.....	140
5.2.3	Rezistivni senzor sile	143
5.2.4	Senzori zasnovani na promeni kapacitivnosti	145
5.2.5	Rezistivni ekran osetljiv na dodir	147
5.2.6	Kapacitivni ekrani osetljivi na dodir	151
6	MERNI INSTRUMENTI ZASNOVANI NA PRIMENI RAČUNARA	154
6.1	Električni model.....	156
6.1.1	Primer određivanja električnog modela - PTC termistor	157
6.2	Kola za kondicioniranje signala	158
6.2.1	Pojačavači.....	158

6.2.2	Filtri	164
6.3	A / D konverzija signala.....	167
6.4	Obrada signala.....	168
6.5	Prenos podataka.....	169
6.6	Softver za akviziciju signala	170
6.6.1	<i>Ready to run</i> aplikacija	171
6.6.2	Programsko okruženje opšte namene	172
6.6.3	Virtuelni instrumenti i programska okruženja posebne namene.....	173
6.6.4	SCADA	179
7	TRENDOVI U SAVREMENIM MERNIM SISTEMIMA	182
7.1	Merenja u dopunjenoj i pojačanoj realnosti	182
	LITERATURA.....	185

1 DEFINICIJA MERENJA

Merenje je metoda dodele kvantitativnih mernih jedinica određenoj veličini. Rezultat merenja je kvantitativna procena merene veličine koja uključuje predstavljanje metode merenja i informaciju o validnosti rezultata merenja (mernoj nesigurnosti). Rezultat merenja, praktično, predstavlja najbolju estimaciju (tj. procenu) merene vrednosti, a može biti i njena aproksimacija [9].

Osnovne merene veličine i njihove osnovne jedinice su: dužina (izražava se u metrima, oznaka m), masa (izražava se u kilogramima, oznaka kg), vreme (izražava se u sekundama, oznaka s), električna struja (izražava se u Amperima, oznaka A), temperatura (izražava se u Kelvinima, oznaka K), jačina svetlosti (izražava se u kandelama, oznaka cd) i količina materije (izražava se u molima, oznaka mol).

Osnovne jedinice su nastale kao rezultat međunarodnog dogovora i Međunarodni sistem jedinica (skraćeno [SI](#) od eng. *International System of Units*) ima najrasprostranjeniju primenu i zvanično je u upotrebi u nauci. Usvajanje jedinstvenog međunarodnog sistema započeto je u Francuskoj u 17. veku i završeno je sredinom 20. veka. Svaka od 7 SI jedinica ima svoju posebnu definiciju i etalon (koji predstavlja standard za proveru vrednosti neke jedinice). Međunarodna organizacija za standardne koja upravlja SI sistemom ima sedište u Francuskoj ([Bureau International des Poids et Mesures](#)). Osim što se SI sistem sastoji od 7 osnovnih jedinica, ovaj sistem definiše i [prefikse](#). Neki prefiksi služe da se predstave jedinice manje od osnovne jedinice sa umanjenjem od po 10 puta (deci - d, centi - c, mili - m, mikro - μ , nano - n, piko - p, femto - f, ato - a, zepto - z i jokto - γ), a neki služe da se predstave jedinice veće od osnovne sa uvećanjem od po 10 puta (deka - da, hekto - h, kilo - k, mega - M, giga - G, tera - T, peta - P, eksa - E, zeta - Z i jota - Y).

Jedinice koje ne pripadaju SI skupu, ubrajaju se u izvedene jedinice. Osnovna osobina izvedenih jedinica je da se njihova kvantitativna vrednost može izraziti preko osnovnih jedinica.

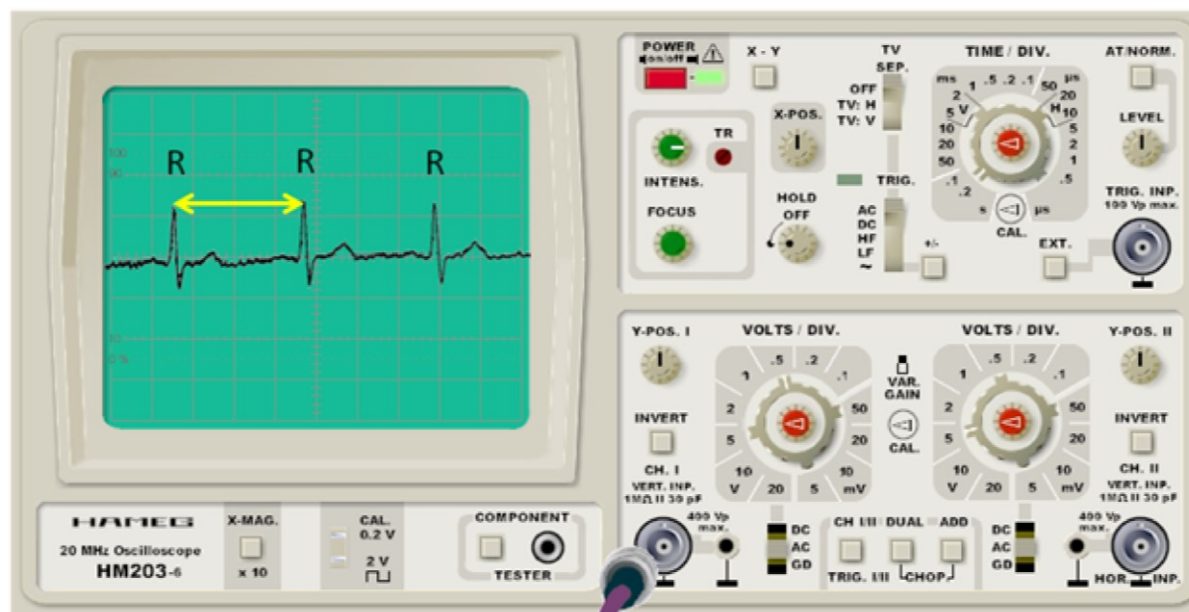
Stil pisanja jedinica podrazumeva da se jedinice uvek pišu malim slovima, osim kada su izvedene od imena osoba. Zato se jedinica Paskal piše kao Pa (jer je dobila naziv po [Blezu Paskalu](#)). Treba napomenuti, da je oznaka za litar veliko slovo L, jer malo slovo l može imati isti prikaz kao broj 1, u zavisnosti od oblika štampanih slova tj. fonta koji se koristi. Dodatno, simboli za jedinice se uvek pišu u jednini, nemaju tačku na kraju, ne pišu se kurzivom (eng. *italic*), razmak uvek razdvaja broj i simbol (osim za ravanske stepene, minute i sekunde), a razmacima se mogu grupisati i brojne vrednosti.

1.1 Rezultat merenja

Da bi se predstavio rezultat merenja, pored kvantitativne procene neke veličine koja se izražava ili SI ili izvedenim jedinicama, potrebno je da postoji podatak o pouzdanosti korišćene merne metode, kao i opis primenjene merne metode. Praktično, u zavisnosti od značaja koji određeno merenje ima, odnosno da li

se za merenje zahteva relativno velika tačnost i preciznost ili ne, za predstavljanje rezultata merenja potrebno je primeniti kompleksniju ili jednostavniju proceduru, respektivno. Na primeru merenja vremenskog intervala, će biti objašnjena potreba za predstavljanjem rezultata merenja sa podatkom o mernoj nesigurnosti, odnosno o pouzdanosti ponovljenih merenja².

Neka je za merenje srčanog pulsa (eng. *heartbeat*) pomoću elektrokardiografa (EKG) potrebno izračunati rastojanje između dva R zupca (trajanje RR intervala). R zubac predstavlja lokalni maksimum periodičnog EKG signala. Na slici 1, dat je primer EKG signala: na ekranu [osciloskopa](#) prikazane su tri periode EKG signala i označena su odgovarajuća tri R zupca.



Sl. 1, EKG signal prikazan na ekranu osciloskopa. Maska osciloskopa je preuzeta sa sajta [Oscilloscope Simulation](#), © 2002, Courtesy of (uz dozvolu) Peter Debik MA, Berlin. Na slici su sa R označena tri R talasa / zupca EKG signala i žutom linijom na ekranu osciloskopa, označeno je trajanje RR intervala (kao rastojanje između prva dva R zupca).

Merenjem vremenskog intervala T_{RR}^1 (rastojanje između dva R zupca označeno na slici 1), dobija se da je $T_{RR}^1 = 1$ s. Međutim, na slici 1 prikazan je i drugi RR interval, a njegova vrednost je $T_{RR}^2 = 0.9$ s. Postavlja se pitanje koja od ove dve vrednosti je tačna? Radi provere, izmereno je ukupno 10 RR intervala i rezultati merenja za preostalih $n = 3, \dots, 10$ intervala su $T_{RR}^{3:n} = 0.9, 0.9, 1, 0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 1$ s. Neka je RR interval meren 10 puta na 5 različitih ispitanika (ID1-5) i neka su rezultati prikazani u tabeli 1.

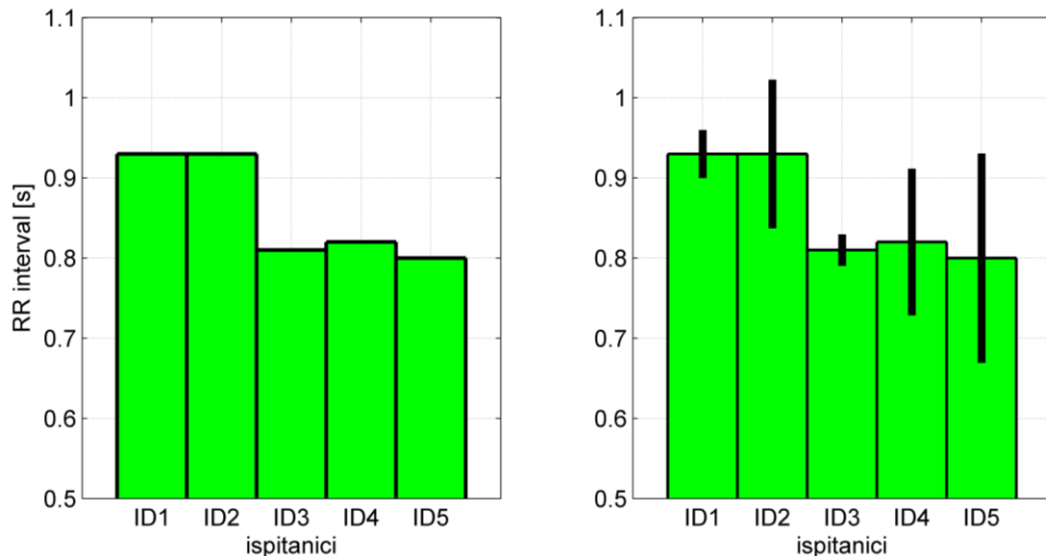
² Termin "ponovljena merenja" se odnosi na realizacije merenja koje rezultuju mernim vrednostima koje su dobijene u istom mernom postupku i pod istim uslovima (eng. *repeatability conditions*). U slučaju merenja RR intervala to je npr. aktivnost ispitanika (puls tj. RR interval se menja tokom fizičke aktivnosti).

Iz dobijenih rezultata, može se zaključiti da kvantitativne vrednosti ponovljenih merenja nisu iste. Na primer, za ispitanika ID1 neka merenja ukazuju na to da je dužina RR intervala 0.9 s, a druga merenja na to da je dužina RR intervala 1 s. Razlog tome može biti veliki broj faktora koji utiču na merenje (odnos signal / šum, pomeranje elektroda, nestabilan *offset* potencijal elektroda, metoda detekcije R intervala i druge), ali i fizioloških faktora koje nije moguće odrediti deterministički³ tj. jednoznačno.

Tabela 1, Rezultati merenja za $n = 10$ ponovljenih merenja RR intervala za pet ispitanika (ID1-5).

N		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_{RR}^n [s]	ID1	1.0	0.9	0.9	0.9	1	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0
	ID2	1.0	1.0	1.0	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	0.7	1.0
	ID3	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.9	0.8
	ID4	0.6	0.7	0.8	1.0	1.0	1.0	0.7	0.8	0.9	0.7
	ID5	0.6	0.6	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.6	0.6

Zaključuje se da je varijabilnost ponovljenih merenja RR intervala rezultat niza faktora čiji se uticaj ne može jednostavno ispitati, pa se usvaja da je raspodela ponovljenog rezultata merenja RR intervala slučajna. Odnosno, postoji neka verovatnoća da će rezultat merenja biti 1 s (ukupno 3 merenja za $n = 1, 5, 10$), a postoji i neka verovatnoća da će rezultat merenja biti 0.9 s (preostalih 7 merenja) za ispitanika ID1.



Sl. 2, Srednje vrednosti izmerenih RR intervala za pet ispitanika ID1-5 za 10 ponovljenih merenja na levom panelu. Srednje vrednosti izmerenih RR intervala za pet ispitanika ID1-5 sa prikazanom mernom nesigurnošću na desnom panelu.

³ Deterministički modeli su takvi da se mogu predstaviti matematičkim modelom.

Logičan i relativno jednostavan način da se rezultat merenja za 10 ponovljenih merenja prikaže, jeste da se izračuna srednja vrednost ponovljenih merenja. Srednje vrednosti RR intervala za svih pet ispitanika su prikazane na levom panelu na slici 2.

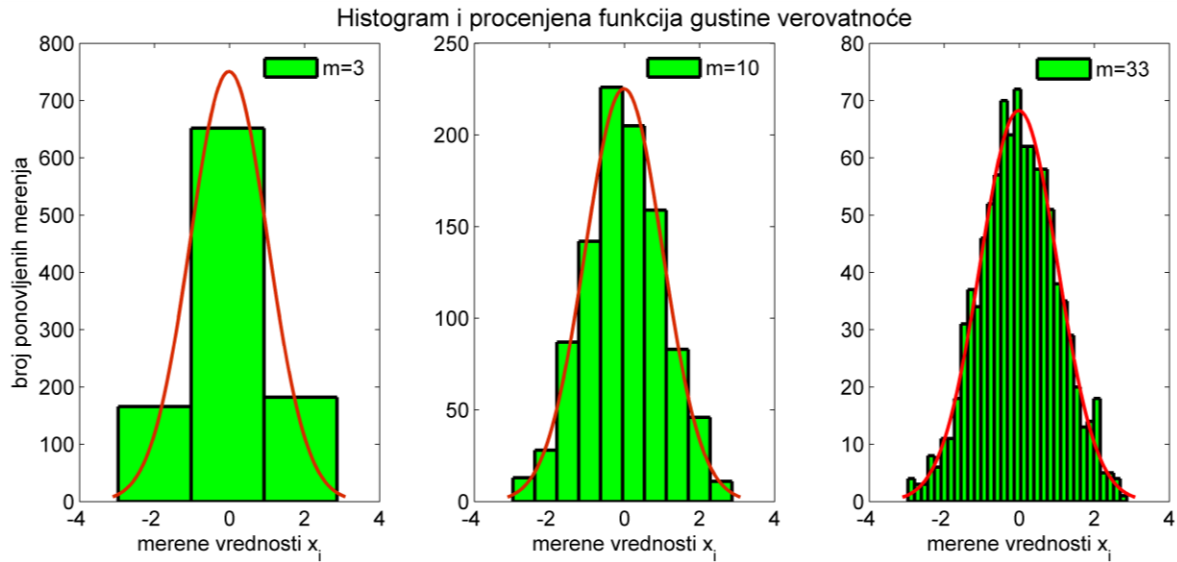
Može se zaključiti sa slike 2 (levi panel), da je srednja vrednost RR intervala za ispitanike ID1 i ID2 veća od srednje vrednosti RR intervala za ispitanike ID3, ID4 i ID5. Međutim, slika 2 (levi panel) ne sadrži informaciju o pojedinim merenjima. Na primer: ID3 i ID5 imaju slične srednje vrednosti RR intervala, ali iz tabele 1 vidi se da je RR interval za ID3 u opsegu [0.8 0.9] s, a za ID5 u opsegu [0.6 1] s. Prema tome, informacija prikazana na levom panelu na slici 2 je nepotpuna, jer ne sadrži podatke o tome kako su slučajno raspodeljene vrednosti za 10 ponovljenih merenja kao u tabeli 1.

Zato se uvodi pojam merne nesigurnosti koja daje informaciju o rasipanju (raspodeli) rezultata merenja oko srednje vrednosti. Adekvatno predstavljen rezultat merenja za svih pet ispitanika za ponovljenih 10 merenja je prikazan na desnom panelu na slici 2. Sa slike 2 (desni panel), relativno jednostavno se dolazi do zaključka da, bez obzira što su srednje vrednosti za ispitanike ID3 i ID5 slične, njihova pojedinačna merenja RR intervala se razlikuju: za ispitanika ID5 ta merenja se nalaze u širem opsegu u odnosu na merenja za ispitanika ID3.

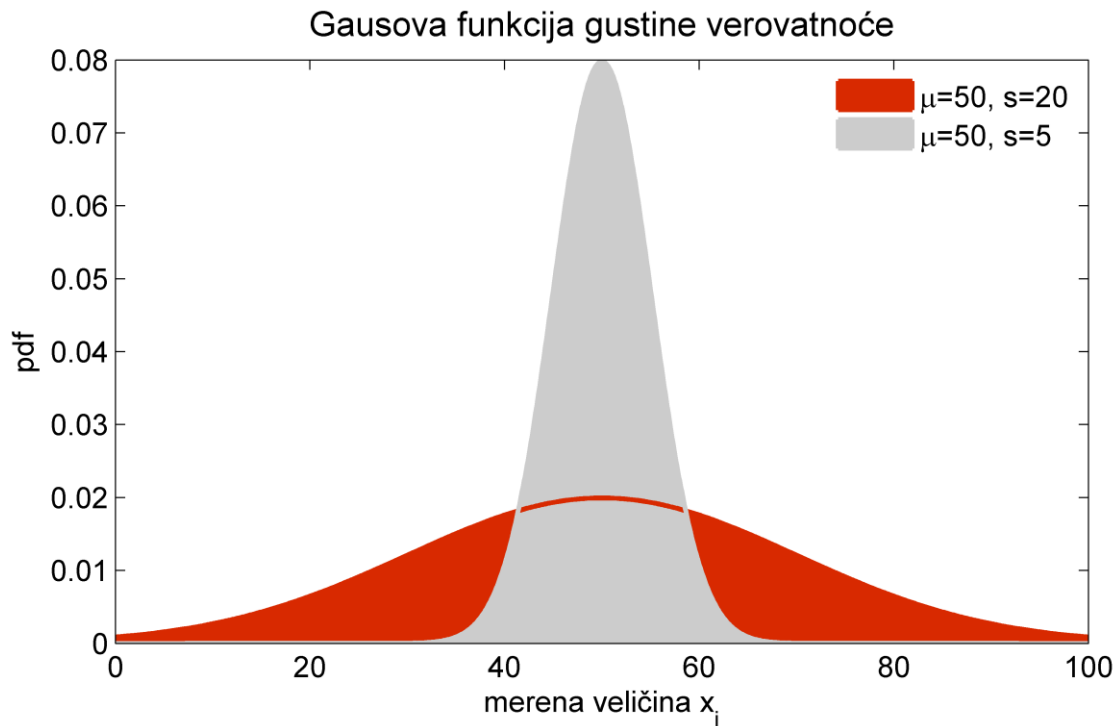
Na ovom primeru prikazan je značaj predstavljanja rezultata merenja pomoću merne nesigurnosti. Može se zaključiti da nijedan rezultat nije potpun ako ne sadrži informaciju o mernoj nesigurnosti. Merna nesigurnost je neizostavni parametar rezultata merenja, jer sa sobom nosi informaciju o pojedinačnim merenjima – koju je nemoguće predstaviti isključivo preko srednje vrednosti merene veličine. Pored informacije o mernoj nesigurnosti, poželjno je da rezultat merenja sadrži opis metode merenja i instrumentacije koja je primenjena (pogotovu ako se radi o merenjima gde se zahteva relativno velika preciznost i tačnost).

Rezultat merenja se može predstaviti pomoću [bar dijagrama](#) kao na slici 2, ali isto tako može se predstaviti i numerički $\bar{x} \pm u$, gde je sa \bar{x} označena srednja vrednost rezultata merenja, a sa u merna nesigurnost ponovljenih merenja). Na primer, za ispitanike ID3 i ID5 rezultat merenja RR intervala je 0.81 ± 0.01 s i 0.80 ± 0.06 s, respektivno. Međutim, vrlo često se u praksi za prikaz rezultata ponovljenih merenja koristi [histogram](#) (na slici 3 prikazan je primer histograma).

Na ordinati (y osi) histograma, nalazi se broj ishoda / merenja, a na apscisi (x osi) se nalaze merene vrednosti (slika 3). Analizom histograma jednostavno se utvrđuje koja je vrednost “najčešće” merena. Ta vrednost je najverovatnije (sa najvećom verovatnoćom) i vrednost najbliža tačnoj vrednosti, odnosno jednaka srednjoj vrednosti kao u prethodnom primeru. Eksperimentalno iskustvo je pokazalo da se manje slučajne greške javljaju češće od većih, odnosno postoji grupisanje merenih rezultata oko tačne vrednosti (slika 3). Na slici 3 prikazana je i procenjena kriva gustine verovatnoće, odnosno funkcija gustine verovatnoće koja opisuje raspodelu merenih vrednosti oko srednje vrednosti. U ovom primeru na sva tri histograma je prikazano merenje koje kao rezultat daje istu srednju vrednost $\bar{x} = 0$, a prikaz ovog merenja razlikuje se po broju intervala (slika 3).



Sl. 3, Primer histograma za merene vrednosti neke fizičke veličine. Na histogramu je predstavljena (crvenom linijom) procenjena Gausova funkcija gustine verovatnoće za dobijene rezultate merenja. Sa m je označen broj intervala za prikaz histograma.

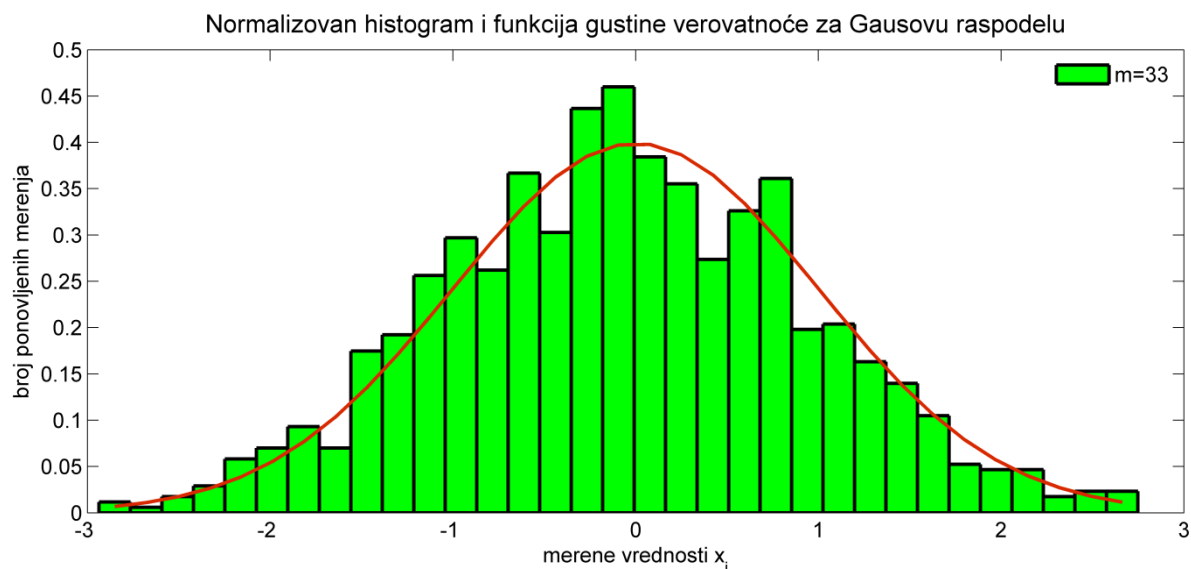


Sl. 4, Na apscisi (x osi) date su vrednosti za ponovljena merenja dve merene veličine koje su označene crvenom i sivom bojom na grafiku za relativno veliki broj ponovljenih merenja. Obe merene veličine imaju srednju vrednost $\mu = 50$ i za njihove standardne devijacije $s = 20$ i $s = 5$. Na ordinati (y osi) je prikazana Gausova funkcija gustine verovatnoće (vrednost od 0 do 1) koja odgovara verovatnoći pojave nekog rezultata merenja.

Na slici 4 prikazan je primer merenja dve veličine koje imaju istu srednju vrednost $\mu = 50$ au (eng. *arbitrary units* - oznaka se koristi kada jedinice u kojima se izražava neka kvantitativna mera nisu poznate) za veliki broj ponovljenih merenja. Sa grafika (slika 4) je moguće primetiti da je najveći broj merenja jednak srednjoj vrednosti u oba slučaja. Takođe, ove dve veličine imaju različite merne nesigurnosti odnosno standardne devijacije (označene sa s na graficima, eng. *standard deviation*). Merena veličina koja ima veću mernu nesigurnost (označena crvenom bojom na slici 4) ima veće "rasipanje" rezultata za razliku od merene veličine sa manjom mernom nesigurnošću. Potrebno je primetiti da se merene vrednosti nalaze sa obe strane srednje vrednosti. Zato se za prikaz rezultata merenja na slici 4 može pretpostaviti da postoji najveća verovatnoća da će se rezultat naći "u blizini" srednje vrednosti, a manja verovatnoća da će se rezultat naći "dalje" od srednje vrednosti. Odnos te dve verovatnoće se razlikuje za ova dva merenja.

Međutim, da bi se funkcija gustine verovatnoće procenila i dalje tumačila (kao na slici 4), potrebno je na odgovarajući način predstaviti rezultat merenja histogramom (slika 3). Postavlja se pitanje koji od histograma sa slike 3 daje najverniji prikaz funkcije gustine verovatnoće za izvršeno merenje?

Najvažniji element prilikom predstavljanja rezultata merenja pomoću histograma je definisanje broja intervala merenja m za broj ponovljenih merenja n . Generalno, važi preporuka da je za opseg merenih vrednosti $[x_{min} x_{max}]$ poželjno odabrati broj intervala merenja kao $m \approx \sqrt{n} + 1$. Za relativno malo m , histogram grubo prikazuje raspodelu rezultata merenja (kao na levom panelu na slici 3), a za relativno veliko m neki od intervala mogu da ostanu "prazni" tj. mogu se javiti prekidi u prikazu funkcije gustine verovatnoće.



Sl. 5, Primer normalizovanog histograma za merene vrednosti neke fizičke veličine i za broj intervala $m = 33$. Na slici je prikazana (crvenom bojom) procenjena funkcija gustine verovatnoće.

Ako se sa n_i označi broj ishoda u intervalu opsega i , tada važi:

$$\sum_{i=1}^m n_i = n \quad \text{Relacija 1}$$

Broj ishoda u intervalu n_i se naziva učestanost intervala. Ako se sa p_i označi relativan broj ishoda u intervalu opsega i , tada važi:

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1 \quad \text{Relacija 2}$$

$$p_i = \frac{n_i}{n}$$

Relativna učestanost intervala (p_i) se može tumačiti i kao verovatnoća intervala. Gustina verovatnoće intervala se dobija kada se relativna učestanost podeli sa širinom intervala, a rezultujući histogram se naziva normalizovan histogram (kao na slici 5). Primiteti da su sada vrednosti na ordinati na grafiku na slici 5 normalizovane u odnosu na histogram sa istim brojem intervala kao što je to prikazano na desnom panelu na slici 3.

Ukoliko su rezultati prikazani u formi normalizovanog histograma i ako je sa x_i označena sredina intervala i , srednja vrednost se može proceniti i kao:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m x_i p_i \quad \text{Relacija 3}$$

Da bi se definisala merna nesigurnost na odgovarajući način, koriste se saznanja iz statistike i teorije verovatnoće. U nastavku ovog poglavlja sledi kratak pregled nekih osnovnih elemenata za dalje razumevanje merne nesigurnosti.

1.1.1 Funkcija raspodele verovatnoće i funkcija gustine verovatnoće

[Funkcija gustine verovatnoće](#) slučajne promenljive x (merene vrednosti) se predstavlja u oznaci $f(x)$. Verovatnoća⁴ da će se merena vrednost x naći u intervalu $[-\infty \infty]$ je jednaka $f(x) = 1$ (100%). Na slici 5 je dat primer funkcije gustine verovatnoće koja je određena histogramom: na ordinati (y osi) je prikazana vrednost funkcije gustine verovatnoće koja se, u opštem slučaju, može izraziti u procentima ili normalizovano u opsegu $[0 \ 1]$. Na apscisi (x osi) su prikazane merene vrednosti. Normalizovani histogram u ovom slučaju predstavlja diskretan prikaz merenja, a funkcija gustine verovatnoće odgovara procenjenom kontinualnom prikazu (slika 5). Shodno tome, suma u izrazu za diskretne signale odgovara

⁴ Verovatnoća je, u opštem slučaju, neki realan broj p u intervalu $[0 \ 1]$ koji je pridružen nekom slučajnom događaju $[1]$. Kada je $p = 0$, onda se taj događaj neće dogoditi, a kada je $p = 1$ onda će se sigurno dogoditi. Nekada se p izražava i u procentima.

integralu u izrazu za kontinualne signale, pa za kontinualnu funkciju gustine verovatnoće važe sledeće relacije:

$$f(x) > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad \text{Relacija 4}$$

Pored funkcije gustine verovatnoće koja pokazuje kako su rezultati ponovljenih merenja raspodeljeni oko srednje vrednosti, često se definiše i funkcija raspodele verovatnoće. Za merenje x_1 , funkcija raspodele verovatnoće u oznaci $F(x_1)$ je jednaka verovatnoći nalaženja rezultata merenja x_1 u intervalu $[-\infty, x_1]$. Odnos funkcije raspodele verovatnoće i funkcije gustine verovatnoće je:

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx \quad \text{Relacija 5}$$

Funkcija raspodele verovatnoće $F(x_1)$ je monotonno neopadajuća funkcija. Funkciji raspodele verovatnoće u kontinualnom domenu odgovara kumulativni histogram u diskretnom domenu.

Jednostavno se može zaključiti da se verovatnoća P da merena veličina X uzima vrednosti u opsegu $[x_1, x_2]$ u oznaci $P(x_1 < X < x_2)$ može izračunati na dva načina: 1) preko funkcije gustine verovatnoće $f(\cdot)$ date u relaciji 4 i 2) preko funkcije raspodele verovatnoće $F(\cdot)$ koja je data u relaciji 5:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad \text{Relacija 6}$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad \text{Relacija 7}$$

U prvom slučaju (relacija 6), da bi se došlo do verovatnoće, računa se integral funkcije gustine verovatnoće na intervalu $[x_1, x_2]$, a u drugom slučaju (relacija 7) se traži razlika između vrednosti funkcija raspodele verovatnoće za granične merene vrednosti. Ove dve funkcije su jednoznačno povezane, odnosno ako je poznata funkcija raspodele verovatnoće $F(\cdot)$, onda se jednostavno može odrediti i funkcija gustine verovatnoće $f(\cdot)$ i obrnuto. Kako se funkcija gustine verovatnoće jednostavno određuje na osnovu predstavljanja rezultata merenja normalizovanim histogramom, to se ona i češće koristi u teoriji električnih merenja.

Na dosadašnjim primerima je pokazano da funkcija gustine verovatnoće ima takav oblik da se rezultati "gomilaju" u neposrednoj okolini srednje vrednosti koja predstavlja procenu merene veličine. Takođe, pokazano je na primerima i eksperimentalno je utvrđeno da je verovatnoća da se rezultat nađe u blizini srednje vrednosti veća, odnosno da je greška odstupanja ponovljenih merenja od procenjene vrednosti mala. U statistici i teoriji verovatnoće se vrednost oko koje se gomilaju rezultati merenja naziva [matematičko očekivanje](#) na histogramu ili grafiku funkcije gustine verovatnoće. Ova veličina se često označava sa E od eng. *expectation* i definiše se za neprekidnu slučajnu promenljivu X sa funkcijom gustine raspodele $f(x)$ kao:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad \text{Relacija 8}$$

Fizički značaj matematičkog očekivanja je vrednost kojoj teži neko merenje. U prethodnim primerima, matematičko očekivanje je bilo jednako srednjoj vrednosti merenja za ponovljena merenja. Međutim, u zavisnosti od prirode merenja i same fizičke veličine, matematičko očekivanje ne mora odgovarati srednjoj vrednosti merenja.

Jedan primer takvog merenja, u kome matematičko očekivanje nije jednako srednjoj vrednosti, je bacanje kockice. Postoji podjednaka verovatnoća da će rezultat bacanja kockice biti brojevi u opsegu [1 6] u opštem slučaju [1 n]. Logično je da ponavljanje procedure bacanja kockice (merenje ishoda) neće biti "gomilano" oko neke vrednosti, već će se sve vrednosti javiti sa podjednakom verovatnoćom. Kako je bacanje kockice diskretan slučaj (praktično postoji ograničen broj realizacija x_n tj. bacanja kockice), pa integral u prethodnom slučaju za kontinualnu vrednost matematičkog očekivanja postaje suma u diskretnom domenu koja je prikazana u relaciji 9.

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_n f(x_n) \quad \text{Relacija 9}$$

Matematičko očekivanje (vrednost kojoj teži događaj bacanja kockice) je: $E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = 3.5$. U ovom slučaju verovatnoća da će neko x_n preuzeti bilo koju vrednost je ista i jednaka je $f(x_n) = \frac{1}{6}$.

Na primeru merenja RR intervala je pokazano da prikaz rezultata merenja nije potpun ako ne sadrži informaciju o mernoj nesigurnosti. U teroji verovatnoće i statistici, kako bi se odredila merna nesigurnost tj. rasipanje ponovljenih merenja oko matematičkog očekivanja, definiše se varijansa u opštem slučaju slučajne promenljive (u slučaju električnih merenja varijansa ponovljenih merenja neke električne veličine). Za neprekidnu slučajnu promenljivu X , sa funkcijom gustine verovatnoće $f(x)$, varijansa se prikazuje u oznaci $D(X)$ od eng. *dispersion* i definisana je kao:

$$D(X) = E\left((X - E(X))^2\right) \quad \text{Relacija 10}$$

Kada bi se pogledao praktični smisao relacije 10, došlo bi se do zaključka da je varijansa jednaka matematičkom očekivanju razlike pojedinačnog merenja i matematičkog očekivanja merenja. Odnosno, varijansa je matematičko očekivanje odstupanja pojedinačnih rezultata ponovljenih merenja od procenjene vrednosti tog merenja. Praktično, varijansa dešiniše "rasipanje" (eng. *dispersion*) rezultata oko matematičkog očekivanja. Što je ona manja i "rasipanje" je manje, pa je merenje preciznije i obrnuto. Daljim transformacijama prethodnog izraza, dobija se:

$$D(X) = E(X^2) - 2E(X)E(E(X)) + (E(X))^2$$

$$D(X) = E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Takođe, može se jednostavno zaključiti, da ako je $D(X) = 0$ onda ne postoji odstupanje od merene vrednosti tj. sve merene vrednosti su identične.

U prethodnom primeru, bacanja kockice, varijansa se računa prema formuli: $D(X) = 1^2 \frac{1}{6} + 2^2 \frac{1}{6} + 3^2 \frac{1}{6} + 4^2 \frac{1}{6} + 5^2 \frac{1}{6} + 6^2 \frac{1}{6} - \left(1 \frac{1}{6} + 2 \frac{1}{6} + 3 \frac{1}{6} + 4 \frac{1}{6} + 5 \frac{1}{6} + 6 \frac{1}{6}\right)^2$ i dobija se da je $D(X) = 2.92$. Sada se može napisati rezultat bacanja kockice kao 3.5 ± 2.92 .

U opštem slučaju, varijansa predstavlja moment drugog reda (kvadrat razlike merene vrednosti i njenog matematičkog očekivanja kao u relaciji 10). Svaka funkcija gustine verovatnoće je u potpunosti opisana matematičkim očekivanjem, varijansom (centralni moment drugog reda) i momentima višeg reda ($p > 2$). U velikom broju praktičnih primera centralni momenti višeg reda se ili mogu zanemariti ili su jednaki 0. Relacija po kojoj se mogu odrediti momenti višeg reda $M(X)$ je:

$$M(X) = E\left((X - E(X))^p\right) \quad \text{Relacija 11}$$

Vrlo često se za definisanje merne nesigurnosti, umesto varijanse, koristi standardna devijacija u oznaci σ koja je jednaka kvadratnom korenu varijanse:

$$\sigma = \sqrt{D(X)} \quad \text{Relacija 12}$$

Prikazane su dve važne veličine (matematičko očekivanje i varijansa) iz teorije verovatnoće na primeru bacanja kockice kada postoji podjednaka verovatnoća da će se pojaviti neka od 6 vrednosti. Međutim, u praktičnim realizacijama merenja to nije često slučaj. Uobičajeno, prilikom merenja neke električne veličine postoji "nagomilavanje" merenih vrednosti oko neke vrednosti tj. srednje vrednosti. Ako je to "nagomilavanje" rezultata simetrično (u obliku zvona) onda se raspodela merenih vrednosti naziva [Normalna ili Gausova raspodela](#). Naziv je dobila po nemačkom matematičaru [Johanu Karlu Fridrihu Gausu](#) koji se bavio raznim oblastima primenjene matematike i statističkim raspodelama, a koji je definisao ovu raspodelu.

Funkcija gustine verovatnoće koja opisuje Gausovu krivu, data je sledećim izrazom:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{Relacija 13}$$

U relaciji 13 su sa μ i σ označeni srednja vrednost i varijansa, respektivno. Njihove procene u diskretnom slučaju (kada postoji neki konačan broj ponovljenih merenja) određene su sledećim formulama:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

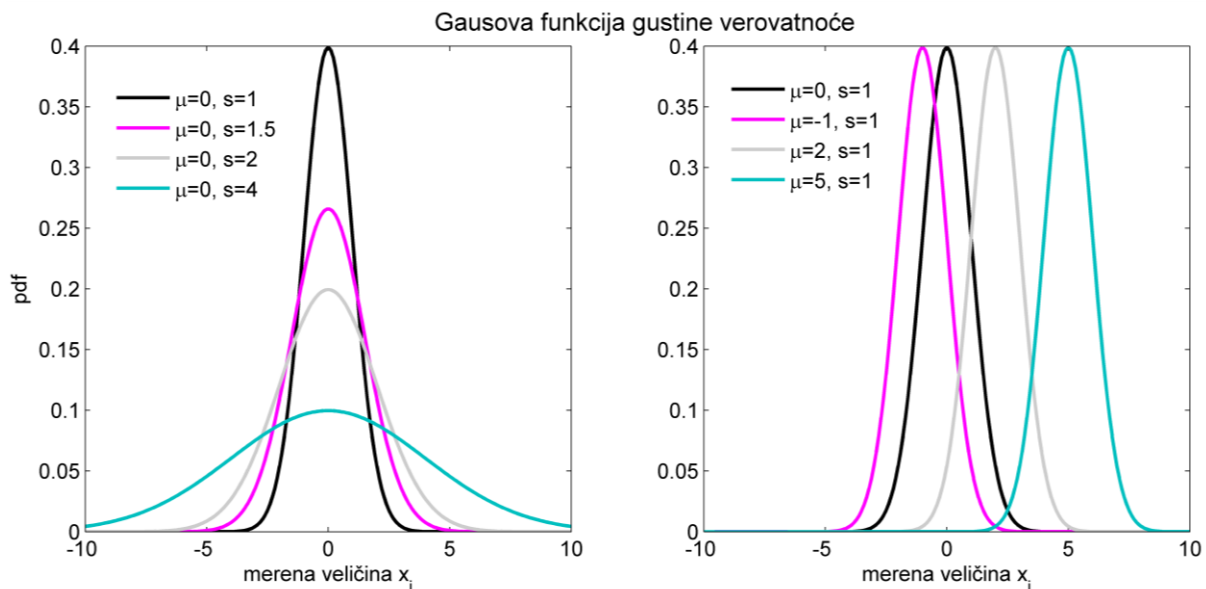
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{Relacija 14}$$

Jednostavnim računskim operacijama se dolazi do izraza za matematičko očekivanje i varijansu Gausove raspodele: $E(X) = \mu$ i $D(X) = \sigma^2$. Funkcija gustine verovatnoće se u literaturi često označava i

skraćenicom pdf od eng. *probability density function*. Zaključuje se da je u prethodnim primerima gde je matematičko očekivanje bilo jednako srednjoj vrednosti ponovljenih merenja, raspodela tih rezultata bila Gausova.

Za različite vrednosti matematičkog očekivanja (srednje vrednosti u slučaju Gausove raspodele) i varijanse, mogu se dobiti različiti oblici Gausovog zvona kao što je to prikazano na slici 6.

Promena srednje vrednosti μ i promena varijanse σ menjaju izgled Gausovog zvona (slika 6). Ovo je u skladu sa time da je matematičko očekivanje jednako srednjoj vrednosti, jer je to vrednost kojoj teži neko merenje (oko koje se nagomilavaju merene vrednosti). Srednja vrednost tj. matematičko očekivanje je jednako lokaciji maksimuma Gausove krive. U zavisnosti od varijanse postoji različito odstupanje merenih vrednosti od matematičkog očekivanja: tj. za manju varijansu Gausovo zvono je uže i obrnuto (slika 6). Ako je varijansa manja, tada je merenje preciznije (slika 6), a ako je maksimum teorijski dobijenog Gausovog zvona približan srednjoj vrednosti eksperimentalnih rezultata merenja, onda je merenje tačnije. Ovo je grafički prikazano na primeru pikada i na primeru Gausovog zvona na slici 7.



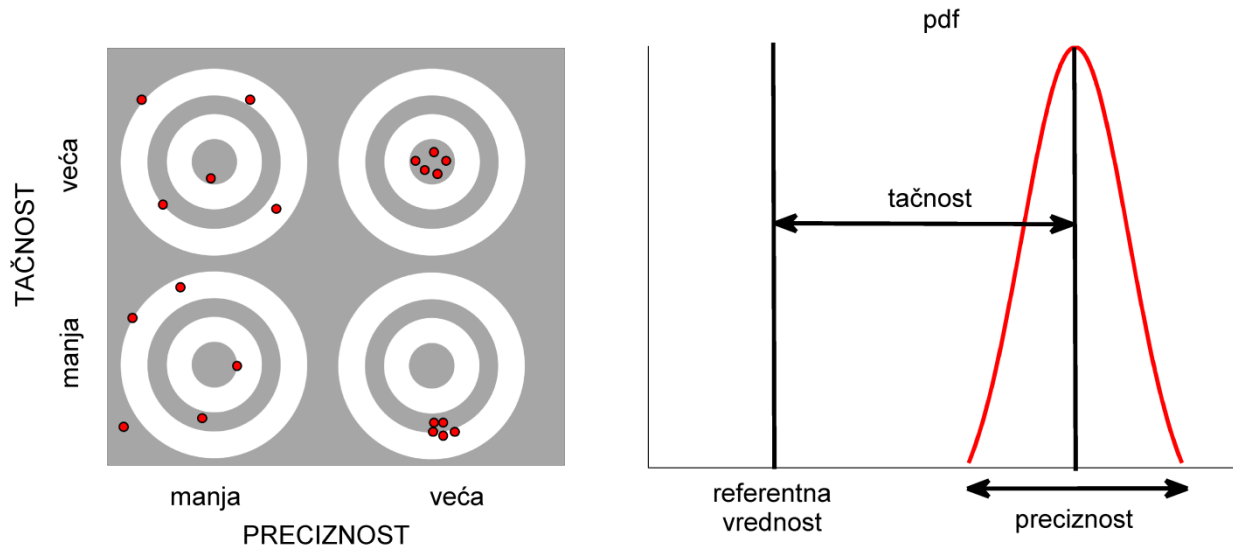
Sl. 6, Gausova zvona u zavisnosti od matematičkog očekivanja μ i standardne devijacije s su prikazane na desnom i levom panelu, respektivno.

Prilikom definisanja Gausove raspodele, trebalo bi spomenuti par karakterističnih Gausovih funkcija gustine verovatnoće koje se često pominju u teoriji verovatnoće i statistici. Ako je $\mu = 0$ i ako je $\sigma = 1$, tada se Gausova raspodela može opisati funkcijom:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Relacija 15

Vrlo često se Gausova funkcija gustine verovatnoće normalizuje kako bi srednja vrednost bila jednaka 0 i varijansa bila jednaka 1, kao u prethodnom primeru.



Sl. 7, Preciznost i tačnost merenja u slučaju pikada (levi panel) i u odnosu na Gausovu funkciju gustine verovatnoće koja je prikazana na desnom panelu. Oznaka pdf (eng. *probability density function*) označava funkciju gustine verovatnoće. Pod referentnom vrednošću, na desnom panelu, podrazumeva se tačna vrednost nekog merenja i odgovara centru mete na levom panelu.

Normalizacija Gausove funkcije gustine verovatnoće je transformacija postojeće funkcije koja se izvodi uvođenjem smene. Odnosno, umesto računanja Gausove funkcije gustine verovatnoće prema merenoj veličini X , ona se računa prema transformisanoj merenoj veličini Z koja je određena relacijom:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Relacija 16

Prilikom uvođenja ovakve transformacije, Gausova funkcija gustine verovatnoće u oznaci $\Phi(y)$ određena je sledećim izrazom:

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Relacija 17

U literaturi se vrlo česte sreće i sledeći oblik ove funkcije:

$$\Phi(y) = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{y}{\sqrt{2}} \right)$$

Relacija 18

gde je sa erf označena funkcija greške (eng. *error function*):

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx$$

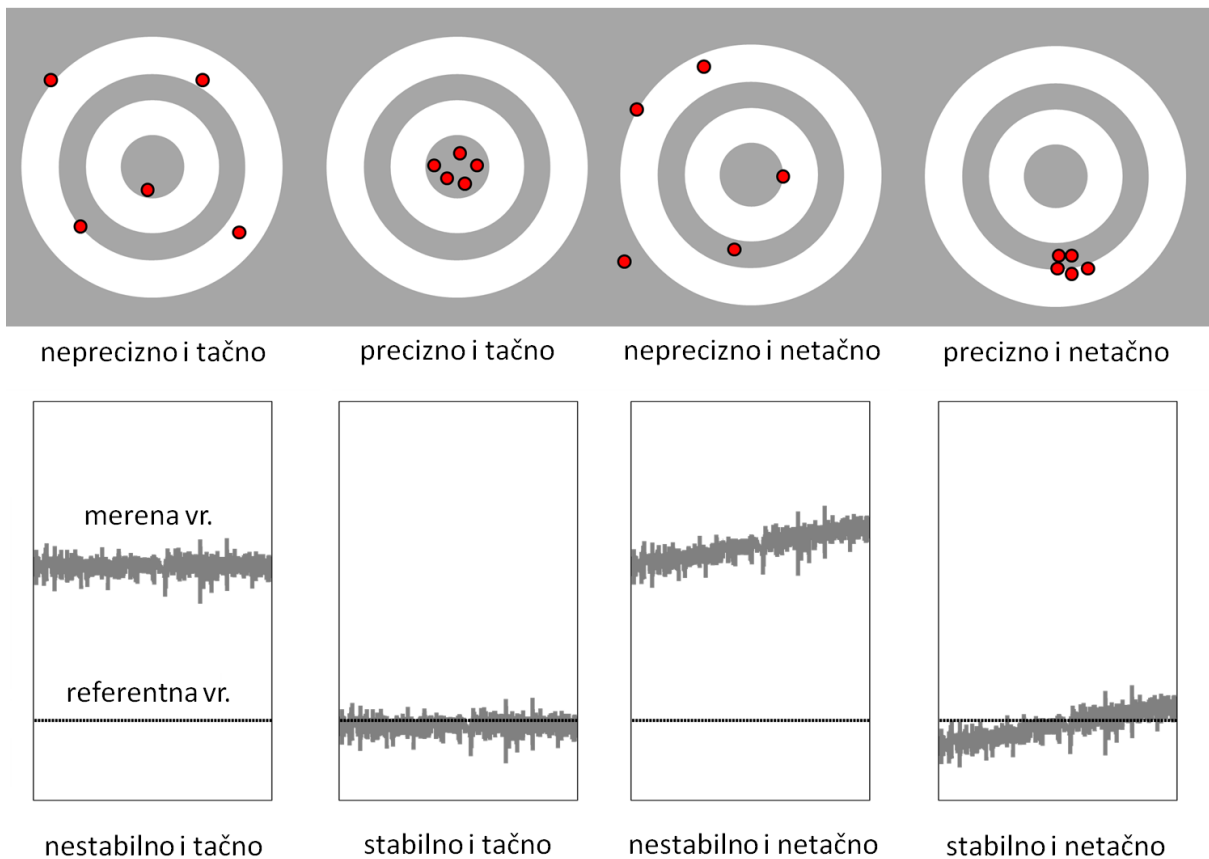
Relacija 19

Ova funkcija greške ima komplementarnu funkciju erfc za koju važi sledeća jednakost:

$$\operatorname{erf}(y) = 1 - \operatorname{erfc}(y)$$

2 MERNE GREŠKE I MERNA NESIGURNOST

Dve važne osobine merenja su, kao što je to pokazano u prethodnom poglavlju, preciznost i tačnost merenja. Primer ilustracije preciznosti i tačnosti je prikazan na slici 8. Precizno, a netačno merenje odgovara merenju sa relativno malom mernom nesigurnošću (manje rasipanje ponovljenih merenja oko rezultata merenja) u kome procena srednje vrednosti nije tačna i ima konstanto odstupanje. Suprotno od ovog primera, tačno i precizno merenje je najpoželjnija situacija u kojoj je merna nesigurnost relativno mala (ne postoji veliko odstupanje od tačne vrednosti) i procena tačne vrednosti (srednja vrednost) je relativno dobra.



Sl. 8, Ilustracija preciznosti i tačnosti merenja. Rezultati merenja vremenske serije su prikazani na donjem panelu u odnosu na klasičnu reprezentaciju (pikado) tačnosti i preciznosti (gornji panel).

Međunarodna referenca za predstavljanje mernih nesigurnosti rezultata merenja je [Guide to Expression of Uncertainty in Measurement](#) [9]. U cilju uniformisanog prikaza rezultata merenja na međunarodnom nivou 1993. godine je objavljeno objedinjeno Uputstvo za izražavanje merne nesigurnosti [9].

Merna nesigurnost određuje širinu intervala u kojoj se može naći merena vrednost sa određenom verovatnoćom i vrednost merne nesigurnosti je uvek pozitivnog znaka. Pri ponovljenim merenjima, merna nesigurnost se javlja iz sledećih razloga: 1) izvor greške nije poznat ili 2) izvor greške nije jednostavno jednoznačno odrediti (npr. ima ih više). Na tačnost merenja, osim merne nesigurnosti ponovljenih merenja, utiču i greške prilikom merenja. Klasična podela grešaka je na: 1) grube greške, 2) sistematske greške i 3) slučajne greške [20, 29].

Pod greškom merenja se podrazumeva razlika između merene i tačne vrednosti. Greška merenja može biti ili pozitivnog ili negativnog znaka. Podela grešaka na sistematske i slučajne je na osnovu fizičkih uzoraka tih grešaka.

Grube greške (eng. *blunder*) su rezultat nestručnosti i nepažnje koje vode izboru neodgovarajućeg mernog postupka ili pogrešnog korišćenja instrumenta. Nisu predmet razmatranja u ovom udžbeniku, jer se pretpostavlja da su stručnost i obazrivost svakog inženjera (kao i budućeg inženjera) na prvom mestu prilikom rukovanja laboratorijskom opremom.

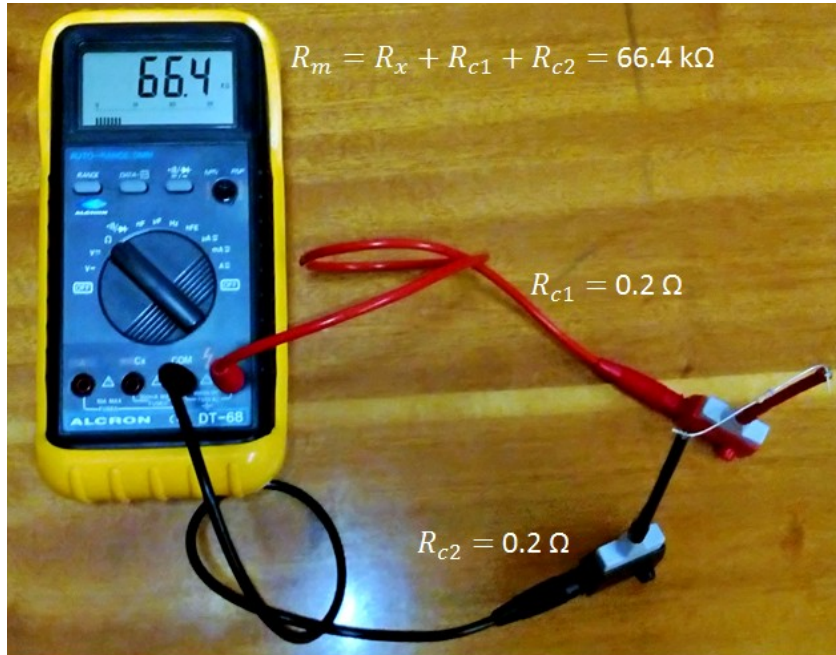
Sistematske greške su najčešće invarijantne (nepromenljive u vremenu) ili se menjaju po određenom zakonu prilikom svakog merenja. Na primer, do sistematske greške dolazi ako instrument nije adekvatno baždaren tj. kalibrisan za merenje odgovarajuće električne (u opštem slučaju fizičke) veličine. Sistematske greške se mogu izbeći pravilnim izborom metode merenja, redovnom kontrolom tačnosti instrumenta i eliminisanjem uticaja spoljnih faktora. Nekada se, radi eliminisanja uticaja sistematske greške, uvodi korekcija merenja.

Jedan od najčešćih izvora sistematskih greški prilikom merenja je neadekvatna kalibracija instrumenta. Na primer, ako se za merenje otpornosti koristi ommetar, onda kablovi koji se koriste da bi se otpornik doveo na ulaze ommetra imaju neku otpornost koja nije zanemariva ($R_c \neq 0$). Kako se koriste dva kabla to je izmerena vrednost R_m jednaka zbiru $2R_c$ i nepoznate otpornosti otpornika R_x . Ilustracija nepravilno kalibrisanog instrumenta za merenje otpornosti je predstavljena na slici 9.

Pod kalibracijom, u opštem slučaju, podrazumeva se skup operacija koje pod određenim uslovima omogućavaju određivanje relacije između fizičke veličine koja se meri i mernog rezultata (koji je opisan procenjenom merenom vrednošću i mernom nesigurnošću). U slučaju merenja nepoznate otpornosti R_x ta relacija je: $R_m = R_x + 2R_c$. Korekcija se može uvesti, ako se kablovi kratko spoje i izračuna otpornost $2R_c$ koja se kasnije oduzima od merene vrednosti kako bi se dobila nepoznata otpornost koja nije rezultat sistematske greške. U opštem slučaju, otpornosti kablova mogu da se razlikuju, pa su na slici 9 korišćene oznake R_{c1} i R_{c2} , odnosno kablovi su pojedinačno obeleženi.

Pod kalibracijom (eng. [calibration](#)) se podrazumeva širok skup operacija, koje nisu predmet razmatranja u ovom udžbeniku, a koje se primenjuju kako za merenje električnih veličina, tako i za merenje bilo koje fizičke veličine. Međunarodni metrološki rečnik ([International Vocabulary of Metrology](#), ©JCGM 200:2012) kalibraciju definiše kao operaciju za koju se pod određenim uslovima, u prvom koraku, određuje relacija između merene vrednosti i nesigurnosti primenom odgovarajućih mernih standarda i indikacija, a u drugom koraku, koristi se informacija iz prvog koraka kako bi se odredio rezultat merenja

tj. njegova korekcija. Upravo je ova procedura i primenjena u goreprikazanom primeru merenja nepoznate otpornosti ommetrom.



Sl. 9, Primer kalibracije ommetra za merenje nepoznate otpornosti. Sa R_m je označena merena vrednost, sa R_x nepoznata otpornost koja se meri i sa R_{c1} i R_{c2} su označene otpornosti kablova i štipaljki (hvataljki) koji su povezani sa otpornikom. Za merenje je korišćen ALCRON DT-68 digitalni multimetar sa automatskim podešavanjem opsega za merenje otpornosti.

U slučaju kada postoje sistematske greške odnosno efekti koji utiču na rezultat merenja, potrebno je odrediti sam efekat i sprovesti proceduru kompenzacije merene veličine. To se najčešće može obaviti na dva načina:

1. korekcijom rezultata merenja (kao u prethodnom primeru oduzimanjem $2R_c$ od merene vrednosti nepoznate otpornosti) ili
2. uvođenjem korekcionog faktora (množenjem merene vrednosti nekom konstantom).

Sistematske efekte nikada nije moguće u potpunosti otkloniti, ali ih je moguće smanjiti na razumnu meru tako da se u daljim merenjima predloženom metodom ili instrumentom sistematske greške mogu smatrati zanemarivim.

Treću grupu grešaka čine slučajne greške. Na početku ovog poglavlja pomenuto je da je klasična podela mernih grešaka na 1) grube, 2) sistematske i 3) slučajne greške. Nakon konstituisanja Pravilnika o merenju i prikazu merenih veličina 1993. godine, podela mernih grešaka je nešto drugačija. Kako bi se na odgovarajući način predstavila merena veličina, uvedeno je računanje merne nesigurnosti (eng. *uncertainty*) koje se ne sme pogrešno tumačiti kao merna greška (eng. *error*).

Sam pojam nesigurnosti se najjednostavnije može opisati sinonimom sumnja. Prema tome, merna nesigurnost (eng. *uncertainty of measurement*) je sumnja u validnost rezultata merenja. To je kvantitativni parametar koji se pridružuje rezultatu merenja i kojim se karakteriše disperzija rezultata merenja (rasipanje pojedinačnih vrednosti merenja oko rezultata merenja) [9]. Termin nesigurnost se i koristi, jer se odstupanje rezultata koje je uračunato kroz mernu nesigurnost ne može predstaviti matematičkim modelom neke pojave niti se uzrok nastanka merne nesigurnosti može jednoznačno odrediti. S druge strane, greška je idealizovan koncept i ne može biti poznata u potpunosti, jer poznavanje greške podrazumeva i poznavanje tačne vrednosti koja praktično nije dostupna. Sistematske greške, koje su opisane ranije, ne ulaze u proračun merne nesigurnosti i po novoj klasifikaciji se smatraju sistematskim efektima. Prema tome, ako nije eksperimentalno ili teorijski određen sistematski efekat, on neće biti uključen u mernu nesigurnost, ali će doprineti ukupnoj greški rezultata merenja. Merna nesigurnost definiše disperziju rezultata oko srednje vrednosti, a sistematski efekti mogu da utiču na procenu srednje vrednosti.

Na osnovu odabira metode koja se koriste prilikom određivanja merne nesigurnosti, dogovorena je podela na mernu nesigurnost tipa A i mernu nesigurnost tipa B. Nekada na rezultat merenja utiču i merna nesigurnost tipa A i tipa B ili više mernih nesigurnosti tipa B, pa se računa ukupna kombinovana merna nesigurnost. Merna nesigurnost tipa A se određuje statističkom obradom rezultata, a merna nesigurnost tipa B određuje se primenom svih ostalih metoda [9, 34].

2.1 Relativna i apsolutna greška merenja

U prethodnom poglavlju je pokazano da će slučajne i grube greške, a prema novoj klasifikaciji samo greške (eng. *error*) dovesti do netačnog merenja bez obzira na mernu nesigurnost. Iz tog razloga, važno je raspolagati odgovarajućim matematičkim aparatom koji omogućava da se procene ove greške tj. efekti. Praktično, tačna vrednost neke merene veličine x_t nije unapred poznata, pa se ove greške ne mogu ni izračunati.

Tačna vrednost (eng. *true value*) je vrednost koja bi se dobila savršenim mernim postupkom koji ne postoji. Međutim, nekada se kvantitet (određena brojna vrednost) neke veličine smatra tačnom vrednošću na osnovu usvojene konvencije. Ovo ima praktični značaj na primer pri definisanju referentnog standarda kojim se neka vrednost usvaja kao tačna vrednost⁵. Najčešće se takva referenta vrednost usvaja nakon velikog broja ponovljenih merenja koju sprovode različite institucije i pri tome primenjuju različite merne metode.

Merenje se, generalno gledano, vrši sa ciljem procene tačne vrednosti \hat{x} . Dva praktična slučaja kada su dostupne nominalne vrednosti merene veličine x_n su:

⁵ Ovako usvojen referentni standard najčešće se ne naziva tačna, već nominalna vrednost.

1. kada se ocenjuje merna metoda, pa se meri unapred poznata veličina i
2. prilikom kalibracije instrumenta.

Apsolutna greška u oznaci Δ se definiše kao apsolutna razlika između procenjene merene veličine i njene unapred poznate nominalne vrednosti:

$$\Delta = |\hat{x} - x_n| \quad \text{Relacija 20}$$

Vrlo često se umesto apsolutne greške, koja ne sadrži informaciji o kvantitetu procenjene i / ili nominalne merene veličine, koristi relativna greška u oznaci r_d . Relativna greška se definiše kao odnos apsolutne razlike i nominalne vrednosti merene veličine, pa nema jedinicu:

$$r_d = \frac{|\hat{x} - x_n|}{x_n} \quad \text{Relacija 21}$$

Množenjem relativne greške, koja se računa prema relaciji 21, sa 100, ova greška se može izraziti u procentima. Mana ove relacije je što ovu relativnu grešku nije moguće odrediti u slučaju kada je nominalna vrednost jednaka 0 ($x_n = 0$), jer deljenje sa nulom nije moguće. Ova greška se nekada naziva i relativna promena (meri se promena u odnosu na nominalnu / referentnu vrednost), ali i relativna razlika (u tom slučaju se meri razlika između dve veličine od kojih nijedna nije referentna, najčešće sa ciljem da se ispita da li je apsolutna vrednost greške bliska 0). Postoji više načina da se ograničenje ove metode (nije moguće deljenje nulom) prevaziđe. Osim u odnosu na nominalnu tj. referentnu merenu vrednost, apsolutna razlika se može posmatrati i u odnosu na srednju vrednost procenjene veličine i nominalne veličine ili u odnosu na veću vrednost od ove dve:

$$r_d = \frac{|\hat{x} - x_n|}{\left(\frac{|\hat{x}| + |x_n|}{2}\right)} \quad \text{Relacija 22}$$

$$r_d = \frac{|\hat{x} - x_n|}{\max(|\hat{x}|, |x_n|)} \quad \text{Relacija 23}$$

Praktična primena relativne greške je i za realizaciju provere da li je neka vrednost dovoljno bliska unapred definisanoj drugoj vrednosti. U tom slučaju se usvaja neki prag koji definiše da li je relativna razlika dva broja dovoljno velika ili mala u odnosu na tako definisan prag.

Osim apsolutne i relativne greške, nekada se računa i opseg rg (eng. *range*) u kome se nalazi neka merena veličina (kao razlika maksimalne i minimalne vrednosti merenja):

$$rg = x_{max} - x_{min} \quad \text{Relacija 24}$$

Međutim, rezultat ponovljenih merenja može biti takav da se baš ova ekstremna merenja (x_{max} i x_{min}) značajno razlikuju od susednih vrednosti i da kao ekstremne vrednosti merenja nisu od značaja za rezultat merenja (eng. *outlier*), pa se predstavljanje opsega merenja ne koristi često u praksi.

2.2 Merna nesigurnost tipa A

Već je pokazano da se pri merenjima fizičke veličine i pri ponovljenim uslovima (na primer: isti operater, ista metoda, isti instrumenti, isti spoljni uslovi, ...) dobijaju različiti rezultati. Ove varijacije su rezultat slučajnih procesa i za njihov opis se koristi merna nesigurnost. Ne postoji način da se ova posledica slučajnih procesa tj. merna nesigurnost merenja izbegne. Moguće je jedino smanjiti mernu nesigurnost ponavljanjem merenja i predstavljanjem procenjene merene veličine. Za procenu merne nesigurnosti koriste se statističke metode i metode teorije verovatnoće koje su već ranije prikazane.

Statističke metode su od značaja, jer se u tom slučaju konačan rezultat (procenjena tačna vrednost tj. procenjena srednja vrednost merenja) predstavlja sa pridruženom mernom nesigurnošću čiji je fizički značaj da sa određenom verovatnoćom garantuje u kom se opsegu nalazi rezultat merenja. Na primer: proizvođač za otpornik od 560 kΩ garantuje sledeće: otpornost otpornika je 560 kΩ sa tolerancijom od 5% (28 kΩ), odnosno otpornost je 560 ± 28 kΩ. Na ovaj način, proizvođač garantuje da se kupljena otpornost sa bojama kao na slici 10 sa određenom verovatnoćom nalazi u opsegu od 532 kΩ do 588 kΩ.



Sl. 10, Primer računanja otpornosti otpornika preko **Color Code** šeme. Na gornjem panelu je dat primer procenjene otpornosti otpornika od 560 kΩ, a na donjem panelu za otpornik otpornosti 237 Ω i njihove tolerancije na osnovu boja na otporniku. Courtesy of Electronix Express www.elexp.com (uz dozvolu od Electronix Express www.elexp.com).

Praktično, ovo znači da prilikom ponovljenog merenja otpornosti ovog otpornika, rezultat koji se dobija će najverovatnije biti u opsegu 560 ± 28 kΩ. Treba imati na umu, da je praktično moguće izvršiti konačan broj merenja i da je srednja vrednost samo procena merene veličine.

Neka su pri ponovljenom merenju (bez umanjenja opštosti) dobijene sledeće vrednosti $x_n > x_{n-1} > \dots > x_2 > x_1$, tada se tačna vrednost sigurno nalazi u intervalu $[x_1, x_n]$. Pojedinačne, odnosno "stvarne" greške $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ su tada određene sledećim relacijama:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_0$$

...

$$\Delta x_n = x_n - x_0$$

U prethodnim relacijama sa x_0 je označena tačna vrednost merene veličine. Sabiranjem svih "stvarnih" grešaka moguće je pokazati da važe sledeće relacije:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{n-1} + \Delta x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n - nx_0$$

$$x_0 = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n) - \frac{1}{n}(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{n-1} + \Delta x_n)$$

Prvi član sa desne strane u prethodnoj relaciji predstavlja srednju vrednost merenja tj. aritmetičku sredinu:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Sada se izraz za tačnu vrednost x_0 , može napisati kao:

$$x_0 = \bar{x} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \quad \text{Relacija 25}$$

Ako se srednja vrednost svih "stvarnih" grešaka (drugi član u relaciji 25 sa desne strane) označi sa ε , onda prethodni izraz može da se napiše kao:

$$x_0 = \bar{x} - \varepsilon \quad \text{Relacija 26}$$

Za svaku "stvarnu" grešku važi da sa podjednakom verovatnoćom može imati i pozitivan i negativan predznak, pa se prethodni izraz može napisati kao:

$$x_0 = \bar{x} \pm \varepsilon \quad \text{Relacija 27}$$

Pri velikom broju ponovljenih merenja (kada n teži beskonačnosti), ε u prethodnom izrazu teži nuli. Odatle sledi da je tačna vrednost približno jednaka srednoj vrednosti rezultata merenja:

$$x_0 \approx \bar{x} \quad \text{Relacija 28}$$

Kako je u praksi nemoguće izvršiti beskonačno veliki broj merenja, to je srednja vrednost rezultata merenja samo procena merene veličine (zato se i uvodi oznaka \bar{x}). Srednja vrednost rezultata merenja je, prema tome, slučajna promenljiva⁶.

Kako je srednja vrednost merenja procena tačne vrednosti, to i dalje postoji neko ε koje se ne može zanemariti. To ε je merna nesigurnost rezultata merenja. Naziva se merna nesigurnost tipa A ili [standardna devijacija](#) i opisuje kako su greške raspodeljene oko srednje vrednosti (tj. u kom opsegu se nalaze oko srednje vrednosti). Često se merna nesigurnost tipa A obeležava sa σ i jednaka je:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{Relacija 29}$$

U relaciji 29, za razliku od ranijeg izraza za ε (relacije 25 i 26), koristi se kvadrat razlike merene vrednosti i procene srednje vrednosti iz razloga što u slučaju da je raspodela rezultata simetrična, postoji podjednaka verovatnoća da će "stvarna" greška merenja imati pozitivan i negativan predznak [34]. Kako "stvarne" greške prilikom merenja mogu sa podjednakom verovatnoćom da imaju i pozitivan i negativan predznak, potrebno je uvesti način da one sa istim težinskim faktorom budu uračunate u ukupnu mernu nesigurnost. Standardno odstupanje pojedinih rezultata u oznaci s se određuje na osnovu izraza:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad \text{Relacija 30}$$

U relaciji 30 je za definisanje standardnog odstupanja korišćena je [Beselova korekcija](#). Odnosno, u ovom izrazu se umesto n koristi $(n - 1)$ kao rezultat Beselove korekcije koja doprinosi većoj mernoj nesigurnosti, ali zato procena merne nesigurnosti ne zavisi od procene srednje vrednosti. Ova korekcija se pokazala praktično korisnom u slučaju kada nije unapred poznato odstupanje srednje vrednosti od populacije, već od uzorka. U praksi, to znači da se merna nesigurnost tipa A sa Beselovom korekcijom koristi ako nije poznata tačna tj. nominalna vrednost merenja. U slučaju da je poznata nominalna vrednost merene veličine koristi se izraz koji nema Beselovu korekciju, što je veoma retko u praksi.

[Populacijom](#) se u statistici označava ukupan skup (koji sadrži sve elemente) neke veličine (u prethodnim slučajevima za $n \rightarrow \infty$ poznata je populacija merenja). Nije moguće praktično izvršiti beskonačno veliki broj merenja i kako se merenje vrši samo konačan broj puta, to je poznata srednja vrednost uzorka, a ne populacije (odnosno procena srednje vrednosti, a ne srednja vrednost). [Uzorak](#) je podskup populacije, čija su pojedinačna merenja poznata / dostupna za analizu. Na osnovu dostupnog uzorka se određuje procena srednje vrednosti. U engleskom jeziku u upotrebi su dva termina *mean* i *average* za srednju vrednost. Uobičajeno, *mean* se koristi ako se računa srednja vrednost populacije, a *average* ako se računa srednja vrednost uzorka.

Kako srednja vrednost takođe predstavlja veličinu slučajnog karaktera i ona ima svoje standardno odstupanje. [Standardna devijacija srednje vrednosti](#) se računa prema sledećoj formuli:

⁶ Slučajna promenljiva je promenljiva koja može uzeti bilo koju vrednosti iz određenog skupa kome je pridružena odgovarajuća raspodela verovatnoće. Može biti diskretna i kontinualna.

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Relacija 31

Obzirom da se često za prikaz merne nesigurnosti koristi standardna devijacija srednje vrednosti to se umesto oznake $s_{\bar{x}}$ koristi oznaka za mernu nesigurnost tipa A u_A od eng. *uncertainty*. Zamenom izraza za standardno odstupanje sa Beselovom korekcijom u izraz za standardnu devijaciju srednje vrednosti, dobija se da se merna nesigurnost tipa A računa prema sledećoj relaciji:

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Relacija 32

Ako se predstavlja merna nesigurnost pojedinačnog merenja x_i tada je merna nesigurnost tipa A jednaka standardnom odstupanju pojedinih rezultata merenja s ($x_i \pm s$), a ako se rezultat predstavlja kao srednja vrednost rezultata merenja, onda je merna nesigurnost jednaka standardnom odstupanju srednje vrednosti u_A ($\bar{x} \pm u_A$) [34].

Ako bi se dalje analiziralo standardno odstupanje tj. merna nesigurnost, došlo bi se do zaključka da i ona ima svoju mernu nesigurnost koja je u slučaju Gausove raspodele data izrazom u relaciji 33.

$$s_s = \frac{s}{\sqrt{2(n-1)}}$$

Relacija 33

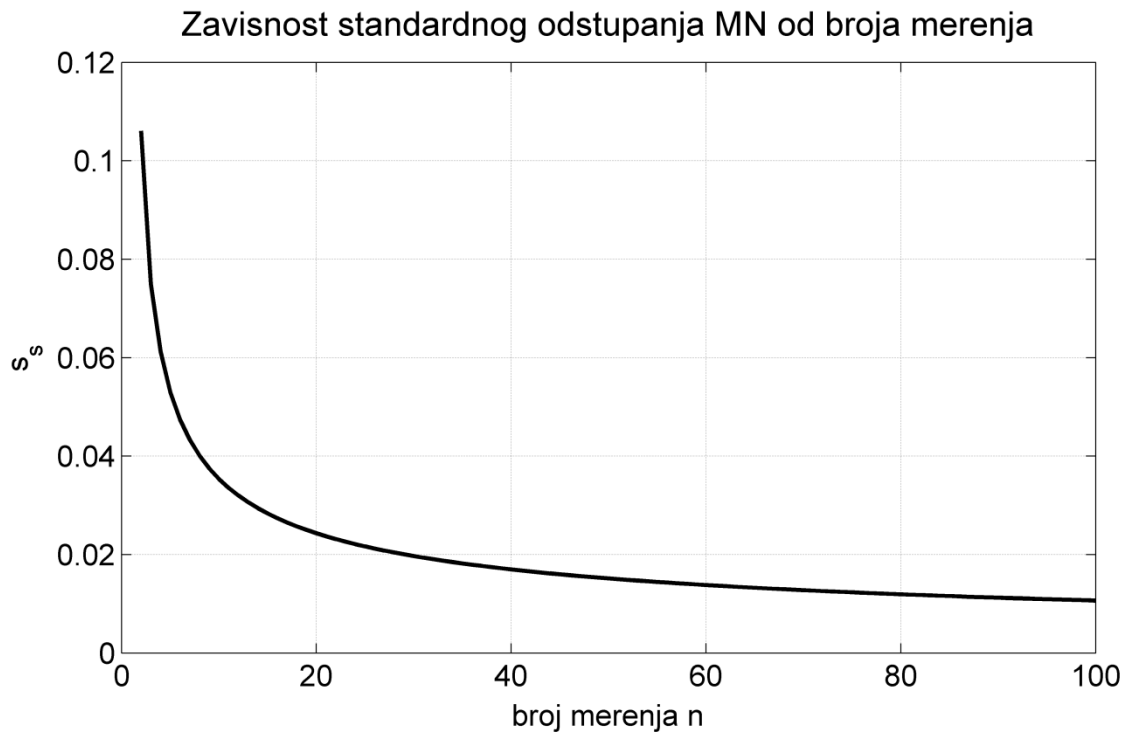
Na slici 11 data je zavisnost standardnog odstupanja od merne nesigurnosti s_s od broja merenja n u slučaju merenja vremenskog RR intervala za ispitanika ID4 i na osnovu podataka o 10 ponovljenih merenja (rezultati ponovljenih merenja dati su u tabeli 1).

Iz prethodnog izraza i sa slike 11 se vidi da s_s relativno "sporo opada" sa porastom broja merenja n . Ovo znači da za neko malo n postoji veliko odstupanje merne nesigurnosti, odnosno procena merne nesigurnosti s je manje pouzdana. Na slici 11 se vidi i da se merna nesigurnost standardnog odstupanja (s_s) eksponencijalno smanjuje sa porastom broja merenja.

Vrednost parametra s_s se može posmatrati i kao nesigurnost merne nesigurnosti, odnosno ovaj parametar daje informaciju o tome kako se slažu teorijska i eksperimentalno dobijena standardna devijacija nekog merenja.

Treba imati na umu, da u slučajevima kada je broj merenja ograničen, procena merne nesigurnosti tipa A ne mora da bude pouzdana metoda za određivanje ukupne merne nesigurnosti, pa se računanje merne nesigurnosti svodi na mernu nesigurnost tipa B.

Računanjem s_s u zavisnosti od broja merenja n je moguće odrediti i optimalan broj merenja kako bi se adekvatno (sa što manjim standardnim odstupanjem s_s) procenila merna nesigurnost merenja.



Sl. 11, Za standardno odstupanje pojedinih rezultata merenja RR intervala za podatke date u tabeli 1 za ispitanika ID4, dobijeno je $s = 0.15$. Prikazano je kako se menja standardno odstupanje merne nesigurnosti za broj merenja od 1 do 100.

2.2.1 Merna nesigurnost tipa A za Gausovu funkciju gustine verovatnoće

Najčešća pretpostavka je da je funkcija gustine verovatnoće Gausova. Rezultati su u tom slučaju raspodeljeni oko srednje vrednosti i funkcija gustine verovatnoće je u obliku zvona. Verovatnoća pojavljivanja / merenja vrednosti koje se nalaze relativno bliže procenjenoj srednjoj vrednosti je veća od onih koje se nalaze relativno blizu ekstremuma funkcije gustine verovatnoće. Varijansa i standardna devijacija su kvantitativni pokazatelji koliko "daleko" od procenjene vrednosti postoji "rasipanje" rezultata merenja.

U slučaju ponovljenih merenja, određuje se merna nesigurnost tipa A i to statističkom analizom rezultata merenja. Oznaka koja se koristi za mernu nesigurnosti tipa A je u_A i u diskretnom slučaju (kada postoji konačan broj realizacija merenja) određuje se prema sledećoj formuli:

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad \text{Relacija 34}$$

Rezultat se predstavlja pomoću srednje vrednosti ponovljenih merenja i merne nesigurnosti: $\bar{x} \pm u_A$. Ovakvom rezultatu se, kao što je to određeno sa otpornošću koja je kodovana bojom, pridružuje

odgovarajuća verovatnoća. U slučaju Gausove raspodele, ovako određenoj mernoj nesigurnosti odgovara verovatnoća od 68%. To znači da rezultat prikazan u obliku $\bar{x} \pm u_A$ znači da se procenjena tačna tj. srednja vrednost rezultata merenja \bar{x} nalazi u opsegu $[\bar{x} - u_A, \bar{x} + u_A]$ sa verovatnoćom od 68%. Ukoliko se zahteva veća tačnost u prikazu rezultata merenja odnosno da verovatnoća bude 95%, računa se proširena merna nesigurnost sa faktorom proširenja 2 (verovatnoći od 95% odgovara $\bar{x} \pm 2u_A$). Za faktor proširenja 3, verovatnoća je 99.7% (analogno $\bar{x} \pm 3u_A$). Treba imati na umu, da je uvek potrebno navesti informaciju o faktoru proširenja prilikom prikaza merene vrednosti. Ukratko, proširena merna nesigurnost predstavlja umnožak standardne merne nesigurnosti i koeficijenta proširenja [34]. U uputstvima proizvođača se najčešće za instrumente navodi proširena merna nesigurnost koja se vrlo često naziva i garantovana karakteristika (kao u slučaju nominalnih otpornosti otpornika).

Za računanje proširene merne nesigurnosti potreban je podatak o brojnoj vrednosti faktora proširenja (eng. *coverage factor*) k . Ovaj faktor zajedno sa podatkom vrednosti merne nesigurnosti definiše interval ($U = ku_A$) u kome se sa određenom verovatnoćom (sigurnošću) nalazi merena veličina. Prema tome, interval poverenja $\pm U$ (eng. *confidence interval*) i nivo poverenja p (eng. *confidence level*) koji se odnosi na verovatnoću i izražava u procentima u potpunosti definišu rezultat merenja. Najčešće vrednosti faktora proširenja koje se sreću u praksi su u opsegu [2 3]. Faktor proširenja se bira prema funkciji gustine verovatnoće i svakom faktoru proširenja odgovara određen nivo poverenja. U praksi se ne sme k proizvoljno povećavati kako bi interval obuhvatio sistematske greške, jer se pojmovi merne nesigurnosti i sistematskog efekta / greške značajno razlikuju. Za adekvatan odabir k potrebno je prethodno poznavanje funkcija gustine verovatnoće rezultata merenja.

Verovatnoća za koju se računaju matematičko očekivanje i varijansa zavisi od funkcija gustine verovatnoće merenja. U slučaju računanja vremenskih RR intervala, ta funkcija je bila Gausova, ali u slučaju bacanja kockice to je bila uniformna funkcija (kada su sve vrednosti podjednako verovatne). U sledećem poglavlju će biti predstavljene neke od najčešće korišćenih funkcija gustine verovatnoće prilikom računanja merne nesigurnosti.

2.2.2 Merna nesigurnost tipa A za negausovske funkcije gustine verovatnoće

Pri određivanju merne nesigurnosti, najčešće se koriste sledeće raspodele [34]:

1. ravnomerna (uniformna),
2. trougaona,
3. trapezoidna i
4. Gausova (normalna).

Svaka funkcija gustine verovatnoće $f(x)$ mora da ispunjava uslov normiranosti, odnosno da je integral u neograničenom intervalu funkcije gustine verovatnoće jednak 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Relacija 35

Praktično, ovo znači da je verovatnoća da će se tokom merenja pojaviti neka vrednost u opsegu $[-\infty, \infty]$ je jednaka 1 (najvećoj verovatnoći), odnosno sigurno je da će merenje rezultovati nekom vrednošću iz ovog skupa. Grafički, ovaj uslov znači da je površina ispod krive funkcije gustine verovatnoće jednaka 1. Iz daljeg opisa pojedinih funkcija gustine verovatnoće koje se često sreću u praksi, može se primetiti da se neke funkcije gustine verovatnoće definišu na ograničenim intervalima. Odnosno postoji konačan opseg u kome se može naći merena vrednost.

U prethodnim primerima je računata srednja vrednost kao procena rezultata ponovljenih merenja. Razlog tome je što pri višestruko ponovljenim merenjima neke električne (u opštem slučaju fizičke) veličine, najverovatnija vrednost te veličine je aritmetička sredina (tj. srednja vrednost) rezultata merenja. Što je veći broj ponovljenih merenja, to je rezultat tačniji, a teorijski pri beskonačno velikom broju merenja (n) dobiće se najtačniji rezultat. Ovu pojavu grupisanja rezultata merenja opisuje Centralna granična teorema koja je rezultat primene Zakona velikih brojeva u teoriji verovatnoće i statistici.

Za bilo koje merenje koje je izvršeno dovoljno veliki broj puta, prema centralnoj graničnoj teoremi, važi da takvo merenje ima Gausovu raspodelu. [Zakon velikih brojeva](#) je jedna od osnovnih teorema u teoriji verovatnoće i statistici. Ova teorema tvrdi da verovatnoća nekog slučajnog događaja za veliki broj ponavljanja postaje verovatnoća tog događaja, odnosno dolazi do konvergencije verovatnoće usled velikog broja ponavljanja događaja. Praktični značaj u električnim merenjima ova teorema ima u računu merne nesigurnosti čija se vrednost u odnosu na procenjenju vrednost rezultata merenja smanjuje kada se merenje ponavlja veliki broj puta.

[Centralna granična teorema](#) (eng. *Central limit theorem*) je jedna od primena Zakona velikih brojeva. Ova teorema tvrdi da nakon velikog broja ponavljanja nekog merenja, funkcija gustine verovatnoće tih merenih veličina će uvek težiti normalnoj (Gausovoj) funkciji gustine verovatnoće. Ograničenje ove teoreme je što se ona može primeniti na niz nezavisnih i slučajnih promenljivih sa identičnom funkcijom gustine verovatnoće (matematičko očekivanje i varijansa ovih promenljivih su konačni). Izuzeci od ovog kriterijuma uglavnom ispunjavaju neki od uslova koji definišu međusobne odnose promenljivih na kojima se definiše centralna granična teorema (Lindbergov uslov i Ljapunovljev uslov).

Klasična Centralna granična teorema se definiše za nezavisne slučajne promenljive (tj. opservacije ili merenja) sa istom raspodelom. Neka su x_1, x_2, \dots, x_n slučajna merenja ponovljena n puta sa matematičkim očekivanjem μ i varijansom σ^2 . Neka je srednja vrednost ovih ponovljenih merenja jednaka:

$$S_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Relacija 36

Po zakonu velikih bojeva, srednja vrednost ovih merenja ima konvergentnu verovatnoću i za $n \rightarrow \infty$ matematičko očekivanje je jednako μ . Klasična centralna granična teorema opisuje veličinu i raspodelu stohastičkih fluktuacija tj. odstupanja oko determinističke vrednosti μ tokom konvergencije ($n \rightarrow \infty$).

Odnosno, ova teorema opisuje kakvo će biti rasipanje rezultata opisano standardnom devijacijom s oko procenjene vrednosti. Prema ovoj teoremi i funkcija gustine verovatnoće merenja i funkcija gustine verovatnoće srednje vrednosti ovih merenja će za dovoljno veliki broj ponovljenih merenja n imati normalnu (Gausovu) funkciju gustine verovatnoće. Otud najveći značaj Gausove raspodele i u teoriji verovatnoće i statistici, ali i u teoriji električnih merenja.

Centralna granična teorema i Zakon velikih brojeva imaju značaj samo u teorijskim razmatranjima, jer oni pretpostavljaju da postoji veliki broj ponovljenih merenja i da $n \rightarrow \infty$. To u praksi nije slučaj, pa se dešava da se merenje neke električne veličine opisuje nekom raspodelom koja nije Gausova.

U nastavku ovog poglavlja, opisane su najčešće korišćene funkcije gustine verovatnoće u praksi. Za svaku funkciju gustine verovatnoće prikazana su i dva parametra kojima se u potpunosti može opisati neka funkcija gustine verovatnoće: matematičko očekivanje i varijansa.

2.2.2.1 Uniformna funkcija gustine verovatnoće

Ova funkcija gustine verovatnoće je određena srednjom vrednošću μ^7 i poluširinom intervala a . Vrednost merenja koje ispunjava ovu raspodelu (tj. slučajne promenljive) x može se nalaziti u sledećem opsegu $\mu \in (\mu - a, \mu + a)$. Svaka vrednost u ovom intervalu je podjednako verovatna, kao što je za bacanje kockice podjednako verovatna svaka vrednost od 1 do 6. Iz uslova normiranosti dobija se da za funkciju gustine verovatnoće $p(x)^8$ za uniformnu⁹ raspodelu (prikazana na slici 12) važi:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2a}, & x_1 < x < x_2 \\ p(x) &= 0, & x \leq x_1 \cap x \geq x_2 \end{aligned} \quad \text{Relacija 37}$$

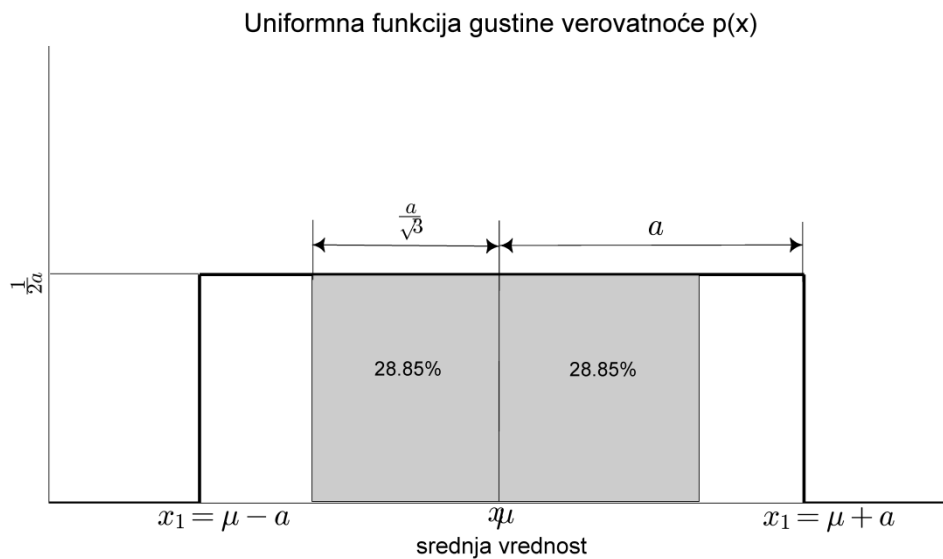
Standardno odstupanje za uniformnu raspodelu je jednako korenu srednje vrednosti kvadrata odstupanja:

$$s = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p(x)(x - \mu)^2 dx} \quad \text{Relacija 38}$$

⁷ Pored do sada korišćene oznake za procenu srednje vrednosti \bar{x} , u literaturi se za srednju vrednost koristi i oznaka μ .

⁸ Vrlo često se u literaturi pored oznake $f(\cdot)$ koristi i oznaka $p(\cdot)$ za funkciju gustine verovatnoće.

⁹ Ova raspodela se nekada naziva i pravougaona raspodela (eng. *rectangular*).



Sl. 12, Funkcija gustine verovatnoće $p(x)$ za uniformnu raspodelu sa označenom poluširinom intervala a , srednjom vrednošću μ i sa standardnom devijacijom $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Ako se u prethodnom izrazu zamene granice u integralu i vrednost funkcije gustine verovatnoće, dobija se:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2a} (x - \mu)^2 dx$$

$$s = \frac{1}{2a} \int_{x_1 - \mu}^{x_2 - \mu} (x - \mu)^2 d(x - \mu)$$

Ako se uvede smena u prethodni integral i ako se sa slike 12 unesu vrednosti za granice intervala uniformne raspodele $x_1 = \mu - a$ i $x_2 = \mu + a$, dobija se:

$$s = \frac{1}{2a} \frac{(x - \mu)^3}{3} \Big|_{-a}^a$$

Konačno, standardna devijacija uniformne raspodele je:

$$s = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Relacija 39

Interval koji pokriva ova standardna devijacija, a koji odgovara mernoj nesigurnosti je prikazan na slici 12. Oblast koja je pokrivena ovom mernom nesigurnošću ima verovatnoću koja je jednaka odnosu površine

oblasti pokrivena mernom nesigurnošću i ukupne oblasti uniformne raspodele: $\frac{2a}{\sqrt{3}} / \frac{1}{2a} = 0.577$ odnosno iznosi 57.7%.

Praktično, uniformna raspodela se primenjuje kada se ne raspolaže sa dovoljno informacija o nekom instrumentu. Na primer, ako otpornik čija je otpornost 560 kΩ ima garantovanu grešku manju od 1%, onda se pretpostavlja da merenje otpornosti otpornika ima bilo koju vrednost na intervalu [554.4, 565.6] kΩ. Ako ne postoji nikakva informacija o merenju i raspodeli, onda se usvaja da je raspodela uniformna. Poluširina a ove funkcije gustine verovatnoće iznosi 5.6 kΩ, pa je procenjena standardna devijacija, odnosno merna nesigurnost tipa B jednaka: $s = \frac{a}{\sqrt{3}} = 3.23$ kΩ.

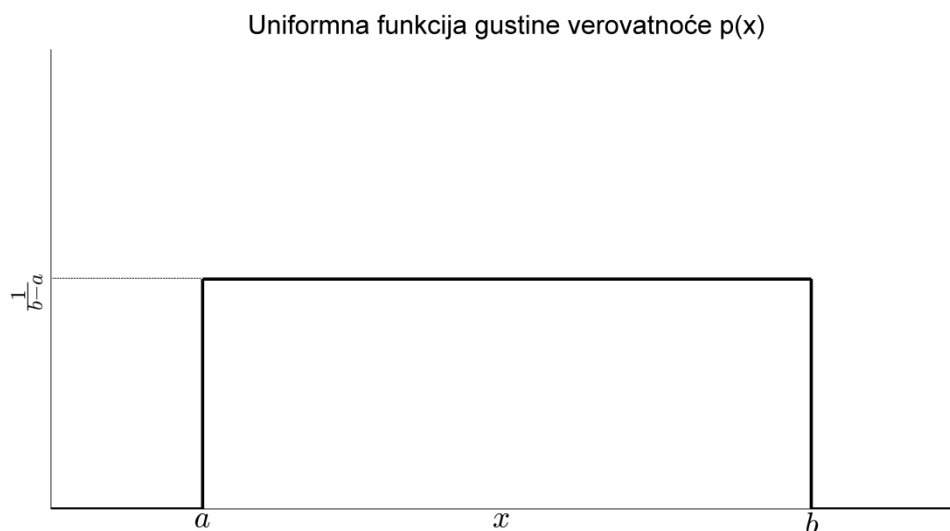
Uniformna raspodela ima primenu u sledećim praktičnim slučajevima [34]:

1. za generisanje slučajnih brojeva,
2. kada se procenjuje merna nesigurnost prilikom očitavanja merene veličine na skali digitalnog indikatora (tada je merna nesigurnost jednaka polovini *digit-a*) i
3. kada su dati tablični podaci o osobinama nekog materijala sa opsegom u kome se nalaze određeni parametri tog materijala (na primer specifična otpornost).

U slučaju da postoje podaci o tome da se neka vrednost (npr. iz tablice uputstva proizvođača) nalazi u opsegu $[x_{min}, x_{max}]$ onda se za uniformnu funkciju gustine verovatnoće usvaja da je srednja vrednost μ jednaka:

$$\mu = \frac{x_{min} + x_{max}}{2} \quad \text{Relacija 40}$$

i u tom slučaju poluširina uniformne gustine raspodele verovatnoće a je jednaka: $a = x_{max} - \mu = \mu - x_{min}$.



Sl. 13, Funkcija gustine verovatnoće $p(x)$ za nesimetričnu uniformnu raspodelu za kontinualne promenljive u intervalu $[a, b]$.

Za interval koji nije simetričan (kao na slici 13), uniformna funkcija gustine verovatnoće je jednaka:

$$p(x) = \frac{1}{b-a}$$

za promenljivu (merenu veličinu) x koja se nalazi u opsegu $[a, b]$. Matematičko očekivanje, u tom slučaju, definisano je kao:

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b$$

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

Za varijansu ovako definisane uniformne raspodele važe sledeće jednakosti:

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b$$

$$E(X^2) = \frac{b^2 + ba + a^2}{3}$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

U slučaju da se predstavlja merna nesigurnost za merenje koje ima uniformnu funkciju gustine verovatnoće sa faktorom proširenja $k = 1$, tada je intervalom $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ predstavljeno 57.7% ishoda. Za $k = 1.5$ taj interval je jednak 86.6%. Treba imati na umu da faktor proširenja k ne može da bude veći od $\sqrt{3}$, jer je u tom slučaju obuhvaćen ceo merni opseg (100%).

Uniformna raspodela se najčešće pretpostavlja kada je dat opseg u kome se može naći neka električna veličina. Vrlo često proizvođači elektronskih komponenti u specifikaciji proizvoda daju informaciju o opsegu električne veličine, pa se za računanje merne nesigurnosti koristi uniformna raspodela. U zavisnosti da li je interval simetričan ili ne, primenjuje se jedan od gorenavednih primera. Treba imati na umu, da veći praktični značaj ima simetrična uniformna funkcija gustine verovatnoće, jer se jednostavnim matematičkim operacijama nesimetrična može transformisati u simetričnu uniformnu funkciju gustine verovatnoće.

Raspodela rezultata merenja, koja se ređe koristi u praksi, a koja je u direktnoj vezi sa uniformnom raspodelom je trapezoidna raspodela. Ta raspodela nije predmet razmatranja u ovom udžbeniku, ali se njeni detalji i način na koji se računaju matematičko očekivanje i standardna devijacija mogu naći u [9].

2.2.2.2 Simetrična trougaona funkcija gustine verovatnoće

I za ovu funkciju gustine verovatnoće, kao i za uniformnu funkciju gustine verovatnoće, interval u kome se nalazi rezultat merenja, odnosno interval u kome je definisana funkcija gustine verovatnoće je konačan. Uobičajeno se usvaja da se poluširina intervala raspodele označava sa a i bez umanjenja opštosti najčešće se pretpostavlja da je ova funkcija gustine verovatnoće simetrična, odnosno da se poluširina a nalazi oko srednje vrednosti μ . Osnovna razlika ove funkcije gustine verovatnoće, u odnosu na uniformnu je skoncentrisanost rezultata merenja oko srednje vrednosti (slika 14). Za rezultate u okolini srednje vrednosti, verovatnoća je veća u odnosu na one koji se nalaze pri krajevima intervala funkcije gustine verovatnoće, odnosno devijacija rezultata merenja je manja. Kako ukupna površina trougla (iz uslova normiranosti za sve funkcije gustine verovatnoće) mora biti 1, to se dobija da je maksimum funkcije gustine verovatnoće u srednjoj vrednosti jednak:

$$p(\mu) = \frac{1}{a}$$

Trougaona funkcija gustine verovatnoće je prikazana na slici 14 i definiše se analitički kao:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{(x - x_1)}{a^2} & x_1 \leq x \leq \mu \\ p(x) &= \frac{(x_2 - x)}{a^2} & \mu \leq x \leq x_2 \\ p(x) &= 0 & x < x_1 \cap x > x_2 \end{aligned} \quad \text{Relacija 41}$$

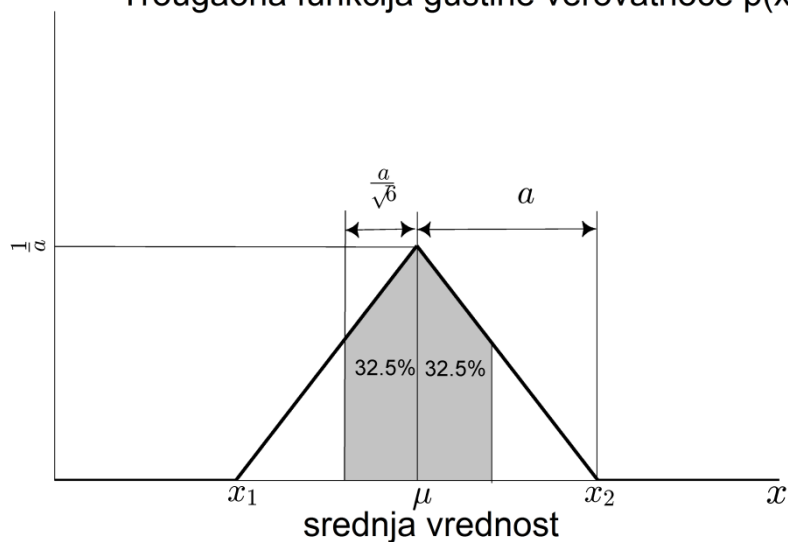
Standardno odstupanje trougaone raspodele, dobija se slično kao i kod uniformne raspodele zamenom izraza za funkciju gustine verovatnoće u izraz za standardnu devijaciju s:

$$s = \frac{a}{\sqrt{6}} \quad \text{Relacija 42}$$

Ovo je ujedno i merna nesigurnost rezultata merenja, čije vrednosti ponovljenih merenja imaju trougaonu funkciju gustine verovatnoće. Na ovaj način proračunatoj mernoj nesigurnosti pridružuje se verovatnoća koja se izračunava odnosom ukupne površine trougla i površine koja je određena standardnom devijacijom i dobija se da osenčena površina na slici 14 ima površinu od 65% od ukupne površine. Merna nesigurnost računata za trougaonu raspodelu za faktor proširenja $k = 1$ ima veću verovatnoću nalaženja rezultata merenja u oblasti koja je pokrivena mernom nesigurnošću od uniformne raspodele. Ovo je očekivano s obzirom na "koncentrisanost" rezultata merenja u trougaonoj funkciji gustine verovatnoće oko srednje vrednosti u odnosu na uniformnu funkciju gustine verovatnoće.

Trougaona raspodela se pretpostavlja kada je poznato da postoji grupisanje rezultata merenja oko neke vrednosti (srednje vrednosti) i ako nije zadovoljen uslov centralne granične teoreme, odnosno ako raspodela nije Gausova [34].

Trougaona funkcija gustine verovatnoće $p(x)$



Sl. 14, Simetrična funkcija gustine verovatnoće $p(x)$ za trougaonu raspodelu rezultata merenja sa poluširinom a .

2.2.2.3 Gausova funkcija gustine verovatnoće i Studentova funkcija gustine verovatnoće

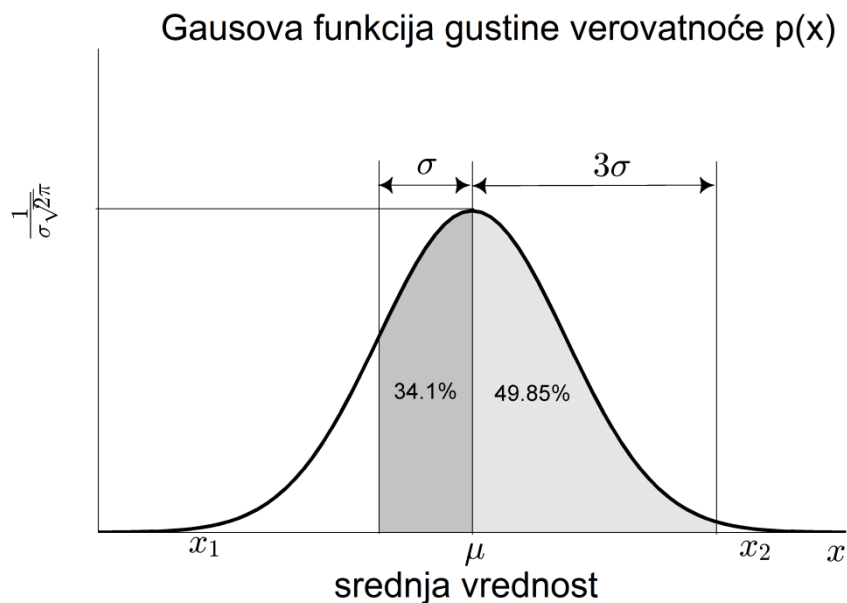
Gausova raspodela se primenjuje kada su ispunjeni uslovi navedeni u centralnoj graničnoj teoremi. Gustina Gausove funkcije gustine verovatnoće je data sledećim izrazom:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad x \in (-\infty, \infty) \quad \text{Relacija 43}$$

Funkcija gustine verovatnoće koja je data u relaciji 43 je definisana na beskonačnom intervalu što znači da za verovatnoću 1 (100%) merenje može "uzeti" bilo koju vrednost. Sa σ je predstavljeno standardno odstupanje u prethodnom izrazu. Kriva Gausove funkcije gustine verovatnoće je simetrična oko srednje vrednosti μ u kojoj ima maksimum čija je vrednost:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

U praksi, Gausova funkcija gustine verovatnoće se definiše sa maksimalnim faktorom proširenja $k = 3$ za rezultat u obliku $\mu \pm 3\sigma$ kojoj odgovara verovatnoća (statistička sigurnost) od 99.73%. Kako je ova vrednost vrlo bliska 100%, uobičajeno se mereni rezultati van ovog intervala tumače kao posledica grube greške i kao takvi proglašavaju [suvišnjim](#) (eng. *outlier*) i odbacuju. U nekim slučajevima, kako bi statistička sigurnost rezultata bila jednoznačno određena sa npr. 99%, određuje se koeficijent proširenja $k = 2.58$ koji nije ceo broj, ali koji odgovara unapred definisanoj statističkoj sigurnosti [34]. Faktoru proširenja $k = 1.96$ odgovara statistička sigurnost (interval poverenja) od 95%, a faktoru proširenja $k = 1.64$ odgovara statistička sigurnost od 90% [9].



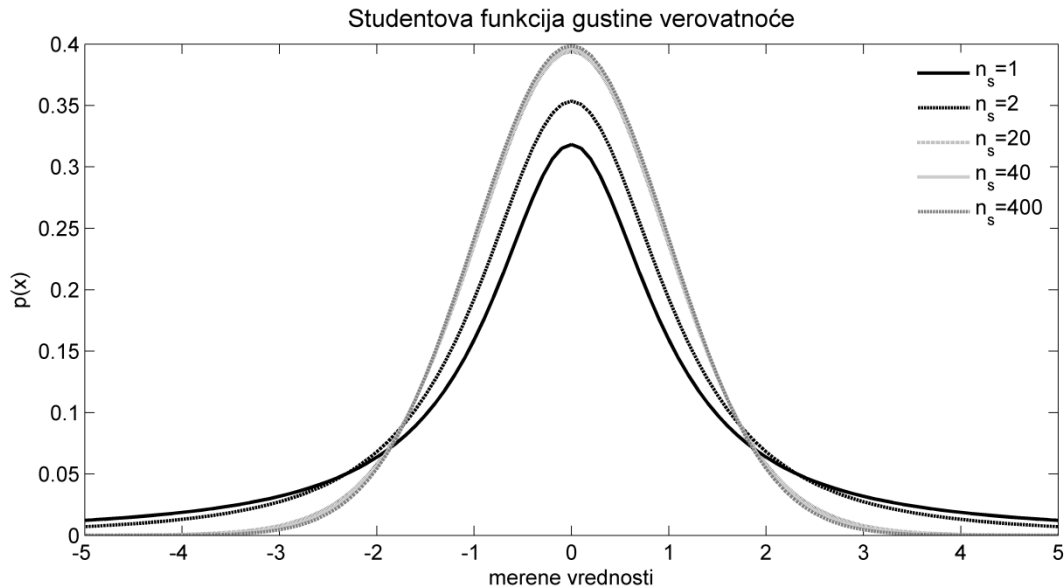
Sl. 15, Simetrična funkcija gustine verovatnoće $p(x)$ za Gausovu (normalnu) raspodelu rezultata merenja.

Za Gausovu funkciju gustine verovatnoće se kaže da je najskontcentrisanija oko srednje vrednosti (slika 15), što se vidi iz poređenja statističke sigurnosti za interval $\mu \pm \sigma$ kojoj odgovara verovatnoća od 68.2% što je više u odnosu na trougaonu i uniformnu raspodelu.

Studentova funkcija gustine verovatnoće se primenjuje u istim slučajevima kada i Gausova funkcija gustine verovatnoće, samo što za primenu ove funkcije broj merenja n može da bude relativno mali u odnosu na Gausovu raspodelu. Na slici 16 su prikazane funkcije gustine verovatnoće Studentove raspodele za različite stepene slobode $n_s = n - 1$. Studentova funkcija gustine verovatnoće je simetrična oko matematičkog očekivanja.

Standardno odstupanje Studentove raspodele je uvek veće nego kod Gausove raspodele i maksimum studentove funkcije gustine verovatnoće je uvek niži u odnosu na maksimum Gausove funkcije gustine verovatnoće.

Prilikom procene tipa raspodele (da li je Gausova ili Studentova), važno je uzeti u obzir graničnu vrednost broja ponovljenih merenja n_{min} . Praktično n_{min} se najčešće kreće u rasponu od 20 do 40 ponovljenih merenja. U praksi se najčešće usvaja prikaz rezultata merenja za $n_{min} \approx 20$ sa verovatnoćama koje su relativno male $\leq 68.2\%$, a za broj merenja $n_{min} \approx 40$ se usvaja relativno velika verovatnoća od $\geq 99\%$ [34].



Sl. 16, Funkcije gustine verovatnoće $p(x)$ za Studentovu raspodelu rezultata merenja i za različite stepene slobodne n_s .

U velikom broju praktičnih primera, nije moguće realizovati realtivno veliki broj ponovljenih merenja $n > 40$, pa se vrlo često umesto Gausove raspodele usvaja Studentova raspodela.

Za promenljivu x , Studentova funkcija gustine verovatnoće se definiše kao:

$$p(x, v) = \frac{1}{\sqrt{\pi v}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \quad \text{Relacija 44}$$

Studentova funkcija gustine verovatnoće opisana relacijom 44 se definiše na neograničenom intervalu $(-\infty < x < \infty)$, Γ je [Gama funkcija](#), a v je broj koji određuje broj stepeni slobode (eng. [degrees of freedom](#)) i važi $v > 0$. Matematičko očekivanje za Studentovu raspodelu je:

$$E(p(x, v)) = 0 \quad \text{Relacija 45}$$

Varijansa za Studentovu raspodelu se računa prema formuli:

$$D(p(x, v)) = \frac{v}{v-2}, \quad v > 2 \quad \text{Relacija 46}$$

Kada broj stepeni slobode v teži beskonačnosti, tada Studentova funkcija gustine verovatnoće postaje Gausova funkcija gustine verovatnoće sa srednjom vrednošću 0 i varijansom 1.

Studentova raspodela se koristi samo u posebnim slučajevima kada se zahteva velika preciznost u definisanju intervala poverenja prilikom predstavljanja rezultata merenja. Odnosno u slučaju kada ne važi Centralna granična teorema. Detaljno je opisana u [9, 27, 29, 34], pa ovde neće biti dalje razmatrana.

Do sada su funkcije gustine verovatnoće bili prikazane u kontinualanom domenu, ali u praksi, kao što je već rečeno, moguće je izvršiti samo određen broj ponovljenih merenja. Za definisanje funkcije gustine verovatnoće, prvo se merene vrednosti predstavljaju u vidu histograma i potom se pretpostavljena funkcija gustina verovatnoće testira / proverava. U tu svrhu se koristi hi kvadrat (χ^2) test.

2.2.2.4 Hi kvadrat test

U praksi, provera funkcije gustine verovatnoće se izvodi za merenja većeg značaja, jer procedura može biti vremenski zahtevna i histogram sa usvojenim pretpostavkama merenja najčešće daje dovoljno informacija o funkciji gustine verovatnoće. Ova funkcija se pretpostavlja i na osnovu praktičnih preporuka za primenu odgovarajuće funkcije gustine verovatnoće [34]. Ako se odluka o pretpostavljenoj funkciji gustine verovatnoće rezultata merenja donosi na osnovu histograma i broja ponovljenih merenja, onda treba imati na umu neke generalne zaključke prilikom primene određene funkcije gustine verovatnoće [34]:

1. Uniformna funkcija gustine verovatnoće ima najmanju statističku sigurnost u intervalu $\mu \pm \sigma$ i najmanji koeficijent proširenja.
2. Kod Gausove funkcije gustine verovatnoće postoji veća razlika između vrednosti koeficijenta proširenja u odnosu na uniformnu funkciju za različite statističke sigurnosti: na primer za $k = 3$ i $k = 2.58$ odgovarajuće statističke sigurnosti su 99.7% i 99%, respektivno.
3. Trougaona i Gausova funkcija gustine verovatnoće imaju bliske vrednosti koeficijenata proširenja, odnosno standardnog odstupanja pri istoj ekvivalentnoj poluširini intervala.
4. Studentova funkcija gustine verovatnoće ima značajno proširenje intervala za relativno mali broj izmerenih uzoraka (relativno mali broj ponovljenih merenja) i relativno visoku verovatnoću koja se priključuje mernoj nesigurnosti.

Za sve raspodele važi: što je faktor proširenja k veći, to je veća i merna nesigurnost, pa je i interval mogućih merenja (na grafiku funkcije gustine verovatnoće) pokriven u većoj meri.

Osim generalnih pretpostavki koje se uzimaju u obzir prilikom odabira odgovarajuće funkcije gustine verovatnoće, može se primeniti na histogram koji je dobijen ponovljenim merenjima [kvadratni hi test](#) (χ^2) kako bi se omogućila kvantitativna provera funkcije gustine verovatnoće u cilju određivanja merne nesigurnosti tipa A. Ovaj test se zasniva na hi kvadrat raspodeli.

To je statistički test i u njemu se postavlja hipoteza o "poklapanju" funkcije gustine verovatnoće koja odgovara rezultatima merenja sa nekom unapred pretpostavljenom funkcijom gustine verovatnoće. Pretpostavka u primeni ovog testa je da parametri funkcije gustine verovatnoće mogu da se odrede na osnovu rezultata merenja.

Na primer, za određena ponovljena merenja, pretpostavlja se da je raspodela uniformna. Tada se uvode hipoteza H_0 i hipoteza H_1 (antihipoteza):

1. H_0 – “Funkcija gustine verovatnoće je uniformna na intervalu [3, 7]” i
2. H_1 – “Funkcija gustine verovatnoće nije uniformna na intervalu [3, 7]”.

Ove hipoteze se dalje testiraju i na osnovu rezultata testa se prihvataju ili odbacuju. Da bi se proverila hipoteza o uniformnosti raspodele, potrebno je definisati funkciju gustine verovatnoće merenih vrednosti (f_{rm}) i teoretsku tj. pretpostavljenu funkciju gustine verovatnoće (f_{rt}). Slaganje empirijske sa teorijskom tj. pretpostavljenom funkcijom gustine verovatnoće, definiše se preko hi kvadrat testa kao:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^K \frac{(f_{rm} - f_{rt})^2}{f_{rt}} \quad \text{Relacija 47}$$

Ovaj test zapravo računa sumu kvadratnih razlika teorijske i eksperimentalne funkcije gustine verovatnoće za svaki interval k histograma. Što je vrednost χ^2 manja to je slaganje sa teorijskom funkcijom gustine verovatnoće veće i obrnuto.

2.2.3 Primeri računanja merne nesigurnosti tipa A

Digitalnim multimetrom visoke tačnosti (smatrati da se uticaj ovog instrumenta na tačnost merenja može zanemariti) izvršeno je po 10 uzastopnih merenja otpornosti dva otpornika R_1 i R_2 . Rezultati ova dva merenja dati su u tabeli 2 (pretpostaviti da oba merenja imaju Gausovu funkciju gustine verovatnoće).

Poznato je da je prilikom merenja jednog od ova dva otpornika korišćen priključak sa Kelvinovim kontaktima, a u drugom merenju nije. Na osnovu *Color Code* šeme proizvođača, poznato je da su nominalne vrednosti ova dva otpornika od $R_{nom1} = 820 \Omega$ i $R_{nom2} = 540 \Omega$. Potrebno je:

- a) Izračunati mernu nesigurnost tipa A za oba merenja i prikazati rezultat merenja za faktor proširenja $k = 2$.
- b) Koje merenje je preciznije, a koje merenje je tačnije?
- c) Koje merenje je izvršeno primenom Kelvinovih kontakta, a koje nije?
- d) Izračunati otpornost kablova u slučaju merenja bez Kelvinovih kontakta?

Srednje vrednosti rezultata merenja za 10 ponovljenih merenja ($n = 10$) otpornosti su:

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{1i} = 820.33 \Omega$$

$$\bar{R}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{2i} = 547.40 \Omega$$

Tabela 2, Podaci izmereni prilikom 10 ponovljenih merenja otpornosti za otpornike R_1 i R_2 .

redni br. merenja		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
otpornost [Ω]	R_1	820.5	820.0	820.1	820.6	820.4	820.3	820.2	820.1	820.4	820.7
	R_2	547.9	546.9	547.1	547.6	547.3	547.0	547.1	547.8	547.6	547.7

Standardne devijacije za oba merenja su:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((R_{1i} - R_{nom1})^2)} = 0.42 \Omega$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((R_{2i} - R_{nom2})^2)} = 7.81 \Omega$$

Standardne devijacije sa Beselovom korekcijom za oba merenja su:

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((R_{1i} - \bar{R}_1)^2)} = 0.23 \Omega$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((R_{2i} - \bar{R}_2)^2)} = 0.36 \Omega$$

Standardne devijacije srednje vrednosti (merna nesigurnost tipa A) je:

$$u_{A1} = \frac{s_1}{\sqrt{n}} = 0.07 \Omega$$

$$u_{A2} = \frac{s_2}{\sqrt{n}} = 0.12 \Omega$$

Za faktor proširenja $k = 2$ (u slučaju Gausove funkcije gustine verovatnoće, odgovarajuća verovatnoća je 95%), dobija se sledeći rezultat merenja za otpornosti ova dva otpornika:

$$R_1 = 820.33 \pm 0.07 \Omega \text{ (ili u procentima } 820.33 \Omega \pm 0.01\%)$$

$$R_2 = 547.40 \pm 0.12 \Omega \text{ (ili u procentima } 547.10 \Omega \pm 0.02\%)$$

Merenje napona R_1 je preciznije jer je merna nesigurnost tipa A (predstavljena u procentima) manja u odnosu na mernu nesigurnost koja je dobijena prilikom merenja otpornosti R_2 .

Prema [9] postoji više načina da se prikaže rezultat merenja. Na primeru otpornosti otpornika R_1 , rezultat se može zapisati kao:

1. $R_1 = 820.33 \Omega$ sa mernom nesigurnošću tipa A (u opštem slučaju sa ukupnom mernom nesigurnošću) $u_A = 70 \text{ m}\Omega$,

2. $R_1 = 820.33 (07) \Omega$ - ovde broj u zagradi označava numeričku vrednost merne nesigurnosti i odnosi se na poslednje dve cifre rezultata merenja,
3. $R_1 = 820.33 (0.07) \Omega$ - ovaj prikaz je sličan prethodnom prikazu rezultata merenja, sa razlikom što vrednost u zagradi označava vrednost merne nesigurnosti i
4. $R_1 = (820.33 \pm 0.07) \Omega$ - ovakav prikaz se vrlo često koristi kada se zahteva relativno visok interval poverenja.

Bez obzira koji od ova četiri načina je odabran, za proširenu mernu nesigurnost, mora se dodati:

1. pun opis kako je merena veličina definisana,
2. merne jedinice se moraju pridružiti i merenoj vrednosti i mernoj nesigurnosti,
3. potrebno je navesti vrednost faktora proširenja i
4. potrebno je dati aproksimativni nivo poverenja p i opisati metodu kako je dobijen nivo poverenja.

U većini slučajeva, dovoljno je da se rezultat zaokruži na dve decimale, osim kada je merenje takvo da se zahteva veći broj decimala. Prilikom zaokruživanja merne nesigurnosti ima smisla da se zaokruživanje izvrši na veću vrednost. Isto tako, u nekim slučajevima brojna vrednost merne nesigurnosti diktira broj decimala u konačnom prikazu rezultata.

Apsolutne greške za ova dva merenja su:

$$\Delta_1 = |\bar{R}_1 - R_{nom1}| = 0.33 \Omega$$

$$\Delta_2 = |\bar{R}_2 - R_{nom2}| = 7.40 \Omega$$

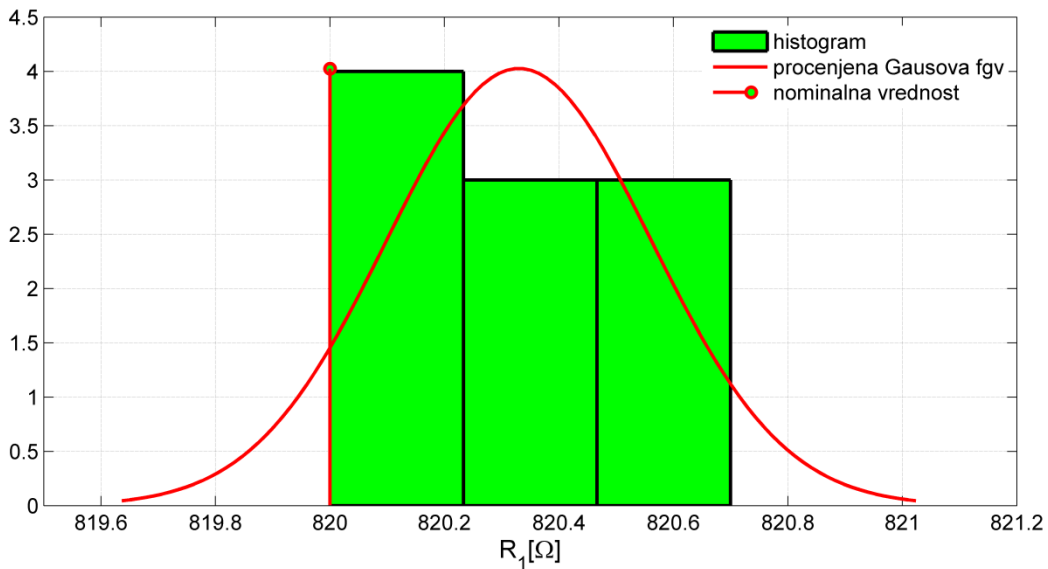
Relativne greške za ova dva merenja su:

$$r_1 = \frac{|\bar{R}_1 - R_{nom1}|}{R_{nom1}} = 0.0004 (0.04\%)$$

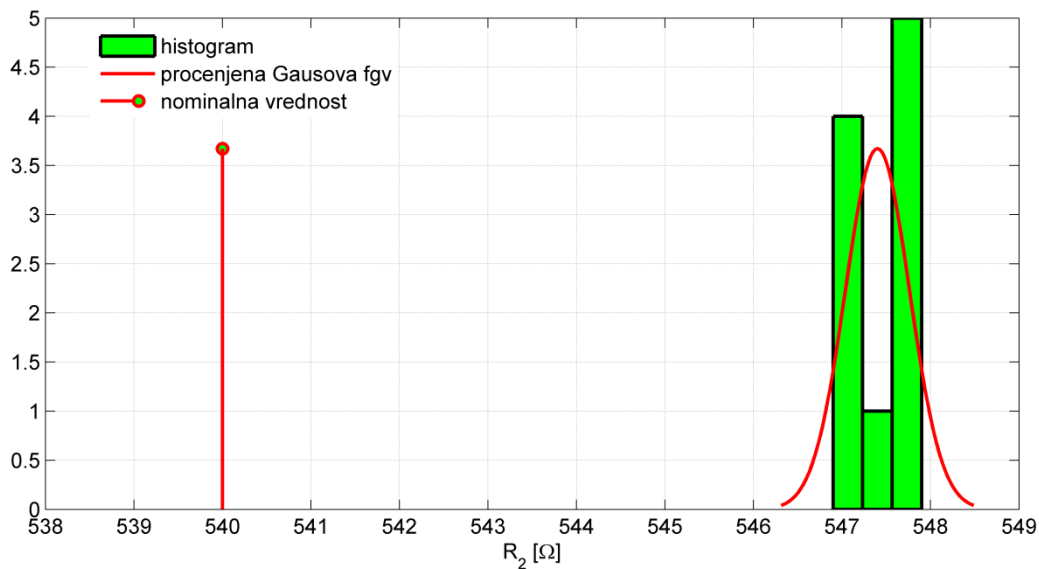
$$r_2 = \frac{|\bar{R}_2 - R_{nom2}|}{R_{nom2}} = 0.0137 (1.37\%)$$

Kako je relativna greška za merenje otpornosti otpornika R_2 veća od relativne greške za merenje otpornosti otpornika R_1 , to je merenje otpornosti otpornika R_1 tačnije. Dolazi se do zaključka da je merenje otpornosti otpornika R_2 izvršeno bez upotrebe Kelvinovih kontakta i da je otpornost kablova $2R_c$ jednaka apsolutnoj razlici $\Delta_2: \Delta_2 = 2R_c$, odnosno otpornost kablova je $R_c = \frac{\Delta_2}{2} = 3.7 \Omega$.

Pod pretpostavkom da u zadatku nije dat podatak o raspodeli za merenje ove dve otpornosti, odnosno da nije bilo dovoljno podataka koje bi omogućile da se donese odluka o tome da li je raspodela Gausova, prvi korak bi bio predstavljanje rezultata merenja u obliku histograma. Za broj intervala 3, dati su histogrami za oba merenja, procenjene Gausove funkcije gustine verovatnoće i nominalna vrednost u odnosu na srednju vrednost merenja na slikama 17-18.



Sl. 17, Histogram za broj intervala $m = \sqrt{n} \approx 3$ i procenjena Gausova funkcija gustine verovatnoće (fgv) za merenje otpornosti otpornika R_1 .



Sl. 18, Histogram za broj intervala $m = \sqrt{n} \approx 3$ i procenjena Gausova funkcija gustine verovatnoće (fgv) za merenje otpornosti otpornika R_2 .

Treba napomenuti da ovaj zadatak nema praktičnog značaja. Merenje otpornosti otpornika se najčešće, u većini laboratorija, vrši sa ciljem određivanja otpornosti odgovarajućeg otpornika za primenu u nekom analognom kolu. Ponovljena merenja tada nemaju nikakvog smisla, jer se tačnost merenja svodi na

tačnost korišćenog instrumenta (najčešće digitalnog multimetra). Odnosno, merna nesigurnost tipa A se može zanemariti. Ponovljena merenja imaju smisla samo ako se radi o otpornicima visoke preciznosti kao što su etaloni. Takođe, ovde je moguće zanemariti mernu nesigurnost u odnosu na sistematsku grešku koja može da se javi (kao što je to prikazano u primeru merenja otpornosti otpornika R_2). Ovaj primer, s toga, ima samo edukativni značaj.

Na histogramima na slikama 17 i 18, moguće je primetiti da iako je pretpostavljena Gausova raspodela, histogrami se mogu opisati uniformnom raspodelom. U tom slučaju su granice uniformne funkcije gustine verovatnoće za merenje R_1 jednake: $a_1 = \min(R_{1i})$ i $b_1 = \max(R_{1i})$, a granice uniformne funkcije gustine verovatnoće za merenje R_2 su: $a_2 = \min(R_{2i})$ i $b_2 = \max(R_{2i})$. Matematičko očekivanje za uniformnu raspodelu je jednako poluširini raspodele, pa se za ova dva merenja dobijaju sledeći rezultati:

$$\mu_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 820.35 \Omega$$

$$\mu_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 547.40 \Omega$$

Standardna devijacija za uniformnu raspodelu je jednaka:

$$s_1 = \frac{b_1 - a_1}{\sqrt{12}} = 0.20 \Omega$$

$$s_2 = \frac{b_2 - a_2}{\sqrt{12}} = 0.29 \Omega$$

Ako bi se rezultat predstavio sa faktorom proširenja $k = 1$, onda bi verovatnoća (poverenje) koje bi bilo pripisano tom intervalu bilo jednako 57.7%. Ove merne nesigurnosti su značajno veće nego u prvom slučaju kada je pretpostavljena Gausova raspodela. Prema tome, pažnju posebno treba posvetiti odabiru raspodele.

Kako ovaj primer ne odgovara realnoj situaciji, odnosno ovde je dat samo u edukativne svrhe, u nastavku ovog poglavlja je opisan primer iz prakse u kome je cilj da se na osnovu ponovljenih merenja dođe do rezultata merenja i merne nesigurnosti.

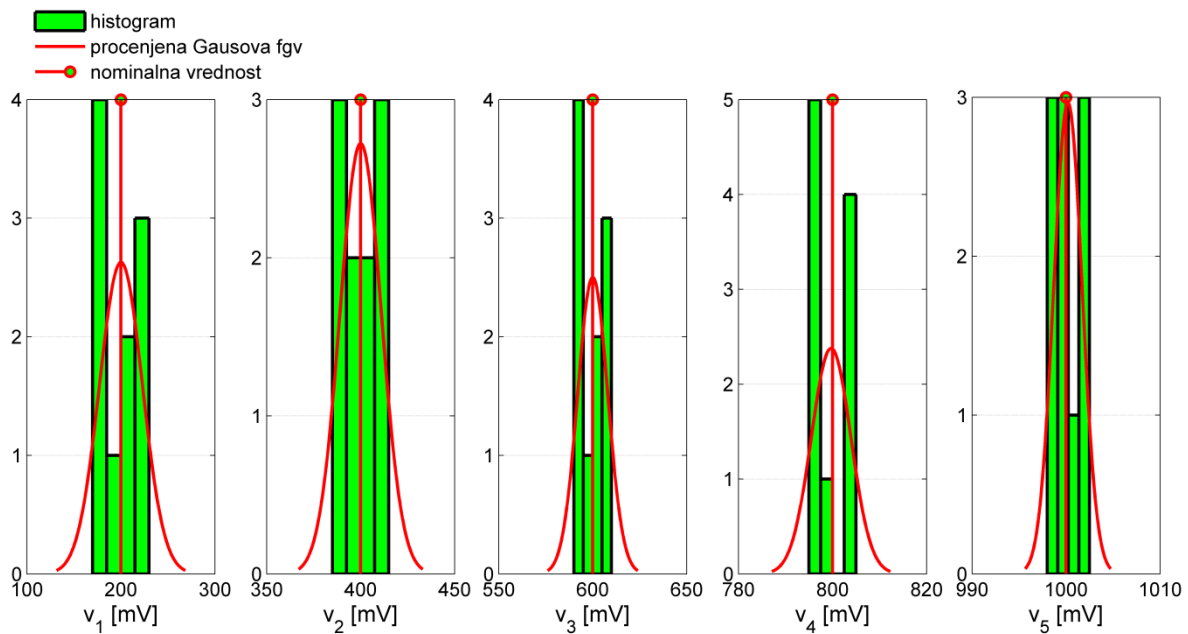
Kada se vrši kalibracija A / D konvertora visoke tačnosti za merenje relativno malih napona, onda se uticaj šuma na merenje ne može zanemariti. Kako šum koji se javlja nije moguće jednoznačno odrediti niti opisati sistematskim efektom, to je od ključnog značaja, u ovom merenju, računanje merne nesigurnosti. Smatrati da je A / D konvertor visoke rezolucije i da je uticaj rezolucije A / D konvertora na merenje zanemarljiv. Izvršeno je po 10 merenja pet referentnih napona U_1, U_2, U_3, U_4 i U_5 . Rezultati merenja su prikazani u tabeli 3. Nominalne vrednosti referentnih napona su poznate jer je korišćen izvor napona visoke preciznosti (čija se greška može zanemariti): $U_1 = 200 \text{ mV}$, $U_2 = 400 \text{ mV}$, $U_3 = 600 \text{ mV}$, $U_4 = 800 \text{ mV}$ i $U_5 = 1 \text{ V}$.

Potrebno je izračunati mernu nesigurnost tipa A za svih pet merenja i uporediti dobijene merne nesigurnosti za svih pet napona. Pod pretpostavkom da je funkcija gustine verovatnoće Gausova, na slici

19 prikazani su histogrami sa procenjenim funkcijama gustine verovatnoće i sa nominalnim vrednostima za svih pet merenja.

Tabela 3, Vrednosti napona dobijene za 10 ponovljenih merenja.

redni br. merenja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
napon [mV]	U_1	180.0	185.0	220.0	215.0	170.0	230.0	175.0	225.0	187.0	214.0
	U_2	385.0	415.0	390.0	410.0	395.0	405.0	388.0	412.0	393.0	407.0
	U_3	590.0	610.0	595.0	605.0	592.0	608.0	596.0	604.0	591.0	609.0
	U_4	795.0	805.0	796.0	804.0	795.0	805.0	797.0	803.0	800.0	797.0
	U_5	999.0	1001.0	998.0	1002.0	1000.0	999.5	1001.5	998.5	1002.5	1000.0



Sl. 19, Histogrami, procenjene Gausove funkcije gustine verovatnoće (fgv) i nominalne vrednosti za pet ponovljenih merenja napona prilikom kalibracije A / D konvertora.

Sa slike 19 se može primetiti da ne postoji nikakav značajni sistematski efekat, a to se može, kao i u pretodnom primeru, proveriti računanjem apsolutne i relativne greške.

Srednje vrednosti ovih napona su:

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{1i} = 200.1 \text{ mV}$$

$$\bar{U}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{2i} = 400.0 \text{ mV}$$

$$\bar{U}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{3i} = 600.0 \text{ mV}$$

$$\bar{U}_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{4i} = 799.7 \text{ mV}$$

$$\bar{U}_5 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{5i} = 1000.2 \text{ mV}$$

Standardne devijacije sa Beselovom korekcijom su:

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((U_{1i} - \bar{U}_1)^2)} = 22.77 \text{ mV}$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((U_{2i} - \bar{U}_2)^2)} = 10.98 \text{ mV}$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((U_{3i} - \bar{U}_3)^2)} = 7.97 \text{ mV}$$

$$s_4 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((U_{4i} - \bar{U}_4)^2)} = 4.19 \text{ mV}$$

$$s_5 = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n ((U_{5i} - \bar{U}_5)^2)} = 1.51 \text{ mV}$$

Za faktor proširenja $k = 1$ (interval statističkog poverenja koji odgovara ovom faktoru proširenja za pretpostavljenu Gausovu raspodelu je 68%) rezultat svih pet merenja je:

$$U_1 = (200.10 \pm 22.77) \text{ mV (11.4\%)}$$

$$U_2 = (400.00 \pm 10.98) \text{ mV (2.7\%)}$$

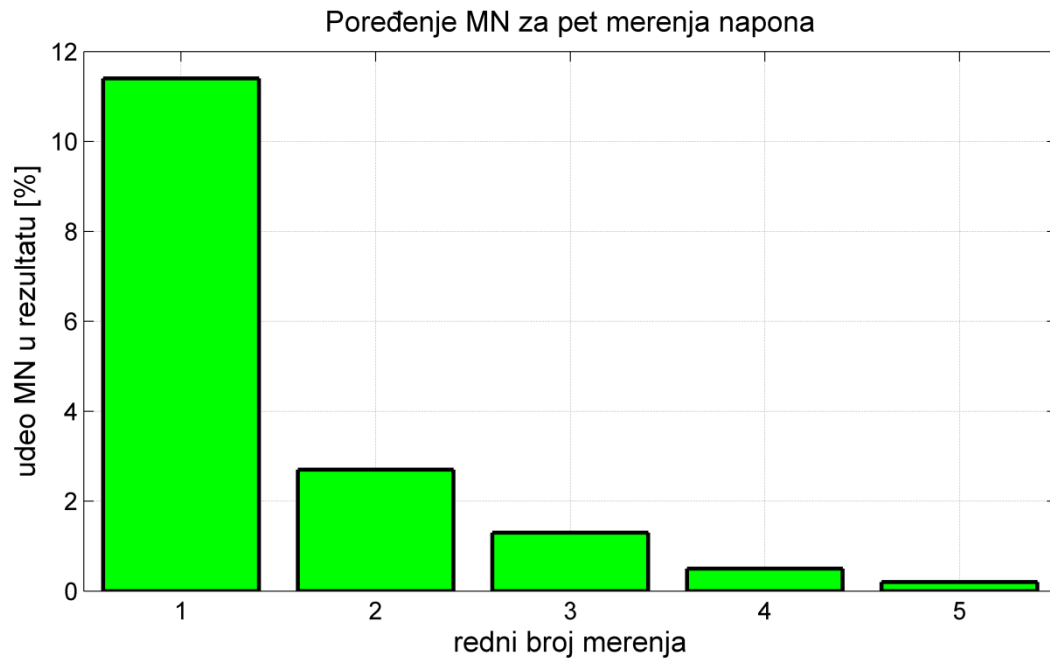
$$U_3 = (600.00 \pm 7.97) \text{ mV (1.3\%)}$$

$$U_4 = (799.70 \pm 4.19) \text{ mV (0.5\%)}$$

$$U_5 = (1000.20 \pm 1.51) \text{ mV (0.2\%)}$$

Da bi se uporedile, merne nesigurnosti su izražene kao procenat rezultata merenja i njihove vrednosti su predstavljene na slici 20. Može se primetiti da je merna nesigurnost merenja napona datim A / D konvertorom veća za merenje manjih napona, a da se kasnije smanjuje kako se vrednost napona povećava. Ovo je verovatno rezultat poboljšanog odnosa signal / šum prilikom merenja napona.

Napomena: Primititi da je u ovom primeru za mernu nesigurnost uzeta vrednost standardne devijacije sa Beselovom korekcijom od pojedinačnih rezultata merenja. Razlog tome je, što je eksperimentalno utvrđeno da ne postoji udeo sistematskih efekata odnosno da su zanemarljivi prilikom merenja.



Sl. 20, Bar dijagram mernih nesigurnosti izraženih u procentima za ponovljenih pet merenja napona pri kalibraciji A / D konvertora.

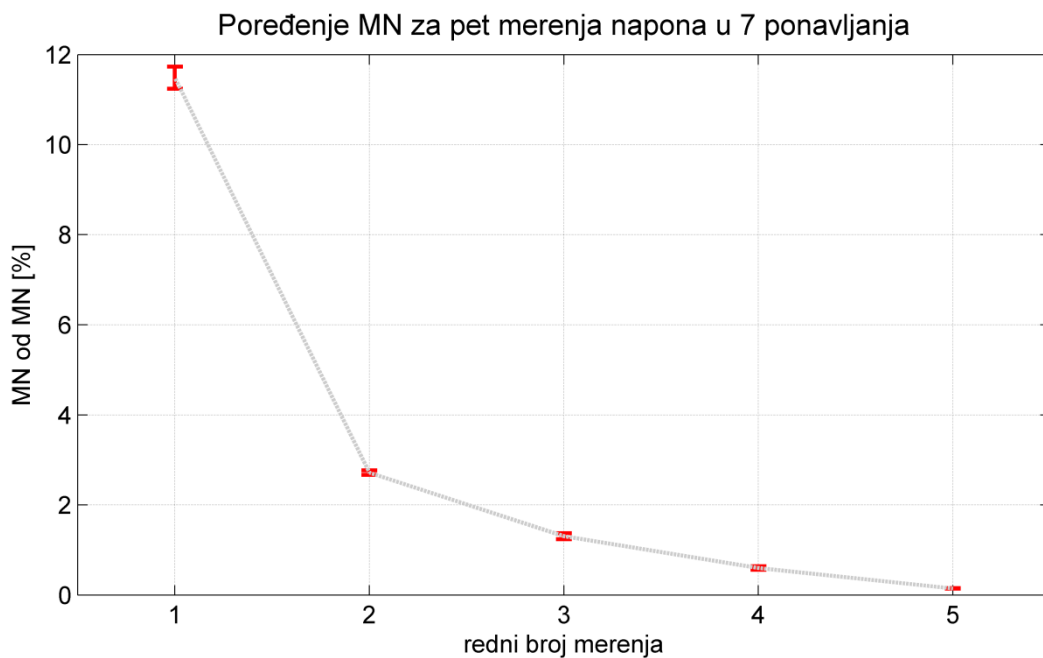
Jedna od posledica centralne granične teoreme [35] je i ta što je raspodela srednjih vrednosti za neko ponovljeno merenje Gausova. Tako se prethodni primer može proširiti na slučaj u kome je procedura 10 ponovljenih merenja ponovljena još 6 puta i dobijeni rezultati su prikazani u tabeli 4.

Prema Centralnoj graničnoj teoremi i srednje vrednosti za 7 ponovljenih merenja imaju Gausovu raspodelu, pa se može odrediti i merna nesigurnost ovako ponovljenih merenja. Dalje, ako su merenja vršile različite institucije može se odabrati referentno merenje na osnovu merne nesigurnosti (bira se ono sa najmanjom mernom nesigurnošću) [9].

Ako se pretpostavlja da su merenja izvršena u približno sličnim (istim) uslovima, onda se može izračunati i srednja vrednost mernih nesigurnosti i njihova merna nesigurnost. Rezultat koji se u tom slučaju dobija je prikazan na slici 21.

Tabela 4, Rezultati 10 ponovljenih merenja pet napona u procesu kalibracije A / D konvertora

redni br. merenja		1	2	3	4	5	6	7
napon [mV]	U_1	200.10 ± 22.77	200.20 ± 23.02	200.00 ± 22.64	200.15 ± 23.10	199.90 ± 22.81	199.85 ± 22.50	200.05 ± 24.00
	U_2	400.00 ± 10.98	400.10 ± 11.00	400.10 ± 10.64	399.90 ± 10.54	399.95 ± 11.10	400.08 ± 10.90	400.09 ± 10.92
	U_3	600.00 ± 7.97	601.10 ± 8.01	600.60 ± 8.05	600.20 ± 8.10	599.95 ± 6.96	599.90 ± 7.82	600.15 ± 8.01
	U_4	799.70 ± 4.19	800.10 ± 5.10	800.15 ± 4.67	800.14 ± 4.88	799.85 ± 5.13	801.00 ± 4.90	800.12 ± 4.71
	U_5	1000.20 ± 1.51	1000.10 ± 1.35	1000.15 ± 1.46	1000.12 ± 1.39	999.99 ± 1.53	1000.09 ± 1.44	1000.14 ± 1.52



Sl. 21, Error bar dijagram mernih nesigurnosti (MN) sa njihovom procenjenim mernim nesigurnostima izraženih u procentima za ponovljenih pet merenja prilikom 7 realizacija procedura merenja napona pri kalibraciji A / D konvertora.

2.3 Merna nesigurnost tipa B

Osim merne nesigurnosti tipa A (uobičajena je oznaka u_A), postoji i merna nesigurnost tipa B (uobičajena oznaka u_B). Obe merne nesigurnosti su kvantitativni pokazatelji greške merenja i uzimaju se u obzir za računanje ukupne merne nesigurnosti u . Merna nesigurnost tipa B se procenjuje na osnovu znanja o mernoj metodi i postupku merenja, o karakteristikama instrumenata i svim ostalim podacima (osim onog što je uračunato kroz proceduru računanja merne nesigurnosti tipa A) [34].

Za mernu nesigurnost tipa A je pokazano da može biti standardna devijacija ili neki njen umnožak, odnosno odgovara širini intervala funkcije gustine verovatnoće koji karakteriše neka verovatnoća tj. nivo poverenja (eng. *level of confidence*). Treba imati na umu, da se i merna nesigurnost tipa B procenjuje na isti način s tim što je u slučaju merne nesigurnosti tipa A, raspodela dobijena na osnovu ponovljenih merenja (eksperimentalnih rezultata), a da u slučaju merne nesigurnosti tipa B raspodela se procenjuje na osnovu dostupnih podataka (pretpostavljena raspodela). Vrlo često se u literaturi [9] za funkcije gustine verovatnoće koja je dobijena na osnovu ponovljenih merenja koristi termin objektivna raspodela (merna nesigurnost tipa A), a za funkciju gustine verovatnoće koja se pretpostavlja na osnovu dostupnih podataka koristi termin subjektivna raspodela (merna nesigurnost tipa B). Merna nesigurnost tipa B je uvedena, jer nije u svim slučajevima moguće izračunati mernu nesigurnost tipa A i jer je to za neke praktične primene kompleksna procedura.

Da bi se procenila merna nesigurnost tipa B i da bi se pretpostavila odgovarajuća raspodela, u obzir se uzimaju sledeći podaci [9, 38]:

1. prethodno znanje o merenoj veličini (odnosi se i na prethodno izvršena merenja),
2. iskustvo ili znanje o osobinama korišćenih materijala i instrumenata,
3. podaci proizvođača,
4. podaci koji su dobijeni na osnovu kalibracije ili sličnih metoda i
5. merna nesigurnost koja je dobijena iz priručnika, a odnosi se na referentna merenja.

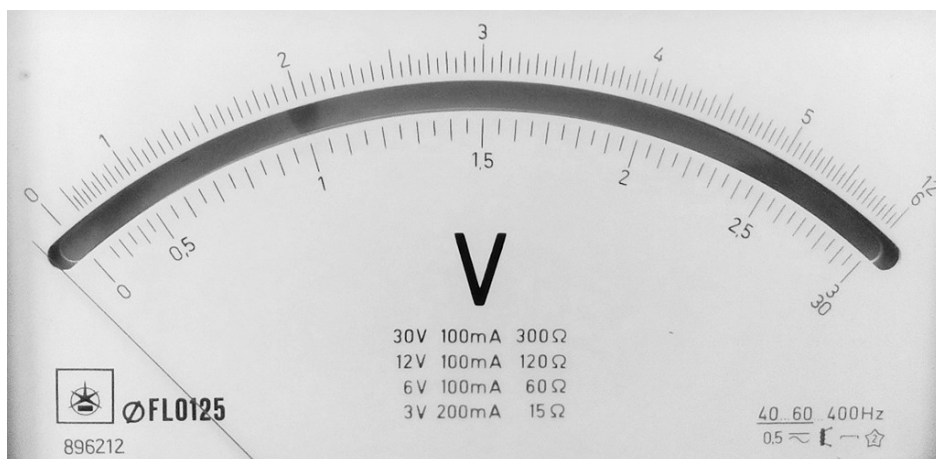
Za procenu merne nesigurnosti tipa B najčešće se od navedenog koristi specifikacija instrumenta prema uputstvu proizvođača [16]. Treba uzeti u obzir da za većinu mernih instrumenata, proizvođači daju ograničen rok garancije, kada je u pitanju tačnost instrumenta. Kako bi instrument mogao da se koristi i nakon isteka garantnog roka, potrebno ga je kalibrisati (uobičajeno jednom godišnje). U uputstvu proizvođača se nalaze i vrednosti spoljnih uslova pod kojima važi tačnost instrumenta i procenjena merna nesigurnost tipa B. To su najčešće vrednost temperature i vlažnosti vazduha u prostoriji u kojoj se koristi instrument. Za potrebe industrijskih merenja, gde je potrebno da merni instrument radi u širem opsegu temperature i vlažnosti vazduha, najčešće se proizvode specijalizovani instrumenti [16]. Temperatura kod digitalnih instrumenata najviše utiče na LCD displej: oni mogu prestati sa odazivanjem i mogu se isključiti kada su temperature relativno niske. Sa druge strane, za relativno visoke temperature, može se pojaviti "senka" na digitalnom displeju. Osim što se definiše radna temperatura, neki proizvođači mogu navesti i promenu tačnosti za različite opsege temperature unutar radnog opsega.

Na osnovu primera iz prakse biće objašnjeno kako se može proceniti merna nesigurnost tipa B. U opštem slučaju, merna nesigurnost tipa B je dobijena ili na osnovu neke unapred dostupne informacije o merenju i instrumentu ili na osnovu usvojenih pretpostavki.

2.3.1 Merna nesigurnost tipa B analognih instrumenata

Kod analognih instrumenata se tačnost najčešće izražava kao procenat od pune skale prilikom čitanja vrednosti merenja (relativna greška). Kada je merena vrednost kod analognog instrumenta blizu cele skale (ili se bar nalazi u drugoj trećini skale), onda merna nesigurnost koja se računa ima smisla. Što je očitavanje merene vrednosti "dalje" od pune skale, onda je veće odstupanje od tačne vrednosti. Primer skale analognog voltmetra prikazan je na slici 22.

Ako je, na primer, dat analogni voltmetar koji ima tačnost $\pm 3\%$ u opsegu $[0\ 100]\text{ V}$ [16], tada se na osnovu ovog podatka, zaključuje da je greška koja se može dobiti merenjem vrednosti u ovom opsegu jednaka $\pm 3\text{ V}$. U tom slučaju, za tačnu vrednost koja se meri od 90 V , instrument može da pokaže neku vrednost u opsegu od 87 V do 93 V , pa je odstupanje od tačne vrednosti tj. greška jednaka $\pm 3.3\%$. Međutim, ako se na ovoj skali meri napon čija je tačna vrednost 10 V , onda instrument može da pokaže neku vrednost u opsegu od 7 V do 13 V , pa je greška $\pm 30\%$. Iz ovog razloga je poželjno da se merenje analognim instrumentima izvrši kada se merena veličina nalazi u poslednjoj trećini opsega. Odnosno, potrebno je odabrati odgovarajući opseg kako bi merenje bilo što tačnije.



Sl. 22, Fotografija skale analognog voltmetra (Iskra, Stegne, Ljubljana) sa 4 merna opsega (3 V, 6 V, 12 V i 30 V).

Za računanje merne nesigurnosti prilikom merenja analognim instrumentima od značaja je podatak o klasi tačnosti K_T . Ova veličina je istaknuta na samom instrumentu i daje podatak o maksimalnoj apsolutnoj greški Δx koju instrument pravi na nekom opsegu M :

$$K_T = 100 \frac{\Delta x}{M} \quad \text{Relacija 48}$$

Prema tome, klasa tačnosti se prema relaciji 48 definiše za svaki merni opseg na instrumentu. Postoje standardi koji definišu posebne klase instrumenata na osnovu vrednosti klase tačnosti. Neke tipične vrednosti su 0.1, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 2.5 i 5.

Najčešće se prilikom merenja pretpostavlja uniformna raspodela, pa se merna nesigurnost tipa B u_B procenjuje kao standardna devijacija za uniformnu raspodelu:

$$u_B = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} \quad \text{Relacija 49}$$

$$u_B = \frac{K_T M}{100\sqrt{3}} \quad \text{Relacija 50}$$

Mana analognih instrumenta je što greška merenja može biti rezultat [paralakse](#). Kod digitalnih instrumenata ne postoji mogućnost pogrešnog očitavanja merene veličine u zavisnosti od položaja posmatrača u odnosu na skalu na kojoj se očitavaju vrednosti. Kako se digitalni instrumenti ne zasnivaju na pokretnim delovima (mehaničkim elementima koji omogućavaju okretanje kazaljke u zavisnosti od merene vrednosti), to je njihova tačnost ne zavisi od položaja u kome se nalaze (u kom delu opsega se nalazi merena veličina) ili od mehaničkih uticaja na sam instrument. Danas se proizvode i digitalni instrumenti koji su vodootporni, tako da se mogu koristiti i u različitim okruženjima, u kojima analogni instrumenti ne bi radili.

Velika prednost digitalnih voltmetra i ampermetra je i u automatskoj detekciji polariteta i opsega merenja i u zaštiti od preopterećenja (dovođenja velikih napona i struja na ulaz instrumenta). Bez obzira na sve prednosti digitalnih u odnosu na analogne instrumente, oni takođe imaju grešku merenja. U sledećem poglavlju data su uputstva za računanje merne nesigurnosti tipa B digitalnih instrumenata.

2.3.2 Merna nesigurnost tipa B digitalnih instrumenata

Prilikom određivanja merne nesigurnosti tipa B digitalnih instrumenata treba posebno obratiti pažnju na sam digitalni displej [16]. Najčešće se navodi da displej ima $3\frac{1}{2}$ cifara (eng. *digits*). Celobrojni deo ovog displeja (3) znači da displej na tom broju mesta / cifara može imati bilo koju vrednost iz opsega [0 9]. Polovina cifre ($\frac{1}{2}$) označava da na tom digitalnom displeju postoji i još jedna najznačajnija cifra koja može imati ili vrednost 0 ili vrednost 1. S toga, ovaj displej je četvorosegmentni. Na primer, takav instrument

može prikazivati vrednosti u opsegu [0 1999]. Nekad se umesto oznake od 3½ cifara koristi i oznaka 2000-count što znači da taj displej može prikazati ukupno 2000 različitih vrednosti merene veličine.

Ako na primer [16] digitalni instrument ima oznaku 4½ cifara ili 20000-count, to znači da može da prikaže vrednosti koje se nalaze u opsegu [0 19999]. Rezolucija se takođe može prikazati i kroz tri četvrtine jedne cifre. To znači da prva i najznačajnija cifra može imati vrednosti 0, 1, 2 ili 3 (ovo je uobičajeno u savremenim digitalnim instrumentima). Tako za instrument sa 4¼ cifara (40000-count) znači da se mogu prikazati vrednosti na displeju u opsegu [0 39999], odnosno može da prikaže 40000 različitih vrednosti.

Treba napomenuti da kod većine digitalnih instrumenata kada najznačajnija cifra preuzima vrednost 0, onda se može desiti da se 0 i ne prikaže na displeju (to zavisi od instrumenta koji se koristi). Dodatno, digitalni instrumenti imaju mogućnost automatske detekcije polariteta, odnosno kod njih se prikazuju negativne vrednosti analogno pozitivnim: za instrument sa 3½ cifara prikaz može obuhvatiti vrednosti u negativnom [-1999 0] i pozitivnom opsegu [0 1999].

Rezolucija (najmanja promena merene veličine koju instrument prikazuje) instrumenta sa 3½ cifara se izražava kao $\frac{1}{2000} 100 \%$ što je 0.05%. Međutim, rezolucija se takođe izražava kao najmanja promena koju može da prikaže digitalni instrument. Ta rezolucija zavisi od drugog važnog podatka kod digitalnih instrumenata, a to je rezolucija A / D konvertora. Rezolucija A / D konvertora se izražava preko bita. Što je veći broj bita to je veća i rezolucija. Na primer za rezoluciju od 24 bita broj koraka je 2^{24} , a za rezoluciju od 12 bita broj koraka je 2^{12} .

Većina savremenih digitalnih instrumenata ima mogućnost automatskog odabira opsega na kome se meri. Međutim, neke starije verzije digitalnih instrumenata imaju manuelnu opciju za odabir opsega. Kod njih se optimalan opseg za očitavanje vrednosti merene veličine određuje kao kod analognih instrumenata. Za digitalni multimetar (DMM) sa 3½ cifara koji može da meri napon za sledeće opsege napona 200 mV, 2 V, 20 V, 200 V i 1000 V, potrebno je opseg instrumenta postaviti na najveću vrednost opsega (u ovom slučaju 1000 V) i postepeno smanjivati opseg dok se ne zadovolji uslov da se merena vrednost očitava kada se nalazi u poslednjoj trećini opsega.

Ako je u uputstvu proizvođača dato da je tačnost DMM-a pri merenju DC (eng. *direct current*) vrednosti $\pm 1\%$, onda znači da je očekivana vrednost za merenje DC napona od 1 V jednaka $1 V \pm 1\%$ ili u opsegu [0.99 1.01] V. Ovako izražena tačnost instrumenta ne uzima u obzir sve elemente, kao što su tolerancija, nelinearnost i *offset* A / D konvertora. Takođe, prisustvo šuma prilikom merenja može uneti dodatna ograničenja u rezoluciji.

Ako je, na primer, u uputstvu za DMM dat sledeći podatak: "*Complete accuracy specifications: \pm (% of reading + number of LSD)*", to znači da je generalna tačnost određena brojem (koji je izražen u procentima) u odnosu na izmerenu tj. "pročitanu" (eng. *read*) vrednost koji se sabira najmanjom značajnom cifrom (LSD od eng. *least significant digit*) [16]. LSD definiše nesigurnost koja može nastati usled, *offset*-a, šuma i greške zaokruživanja. Broj LSD može da varira u zavisnosti od opsega, pa je veoma važno da se posmatra u odnosu na opseg u kome je merenje izvršeno [16].

Ako je opseg DMM-a za merenje napona 30 kV i ako se rezultat prikazuje na četvorosegmentnom displeju sa 3½ cifara, onda nije moguće koristiti prvu najznačajniju cifru (jer ta cifra može da preuzme samo vrednosti 0 ili 1) [33]. U tom slučaju postoji ograničenje na trosegmentni displej, pa je prikaz oblika 30.0 kV. Ako bi se za prikaz ovog napona koristio displej sa 4½ cifara, onda bi vrednost bila prikazana kao 30.00 kV. Za instrument sa displejem sa 3½ cifara i opsegom od 10 kV, prikaz će biti četvorosegmentni i na displeju će biti prikazano 10.00 kV. Za instrument sa displejem sa 4½ cifara i opsegom od 10 kV, prikaz će biti četvorosegmentni i na displeju će biti prikazano 10.000 kV.

Poseban slučaj je prikaz opsega kao što su 2, 20, 200 i 2000 [33]. Ako se na primer za prikaz napona u opsegu do 20 kV koristi displej sa 3½ cifara onda se umesto maksimalanog prikaza od 20.0 kV (gde se najznačajnija cifra ne koristi) može podesiti da maksimalni prikaz bude 19.99 kV kako bi rezolucija bila veća. Mana prikaza oblika 19.99 kV je što se ne može prikazati vrednost od 20.00 kV. Kada bi se napon od 20.00 kV doveo na instrument koji meri maksimalno 19.99 kV, tada bi se na instrumentu pojavilo upozorenje za prekoračenje opsega (eng. *overload*).

Opseg A / D konvertora (nastao usled zaokruživanja u procesu digitalizacije) se može odrediti poređenjem rezultata dva A / D konvertora od kojih jedan ima veći broj bita, a drugi manji.

Ako je rezolucija nekog digitalnog instrumenta δ_x , onda se očitana vrednost merenja nepoznate merene veličine x nalazi u opsegu $\left[x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}\right]$. Pod pretpostavkom simetrične uniformne raspodele, standardna devijacija (merna nesigurnost tipa B) za svako očitavanje je $u_B = \frac{\delta_x}{\sqrt{12}} = 0.29\delta_x$.

Greška merenja sa digitalnim instrumentima se najčešće procenjuje kao zbir procentualne greške u odnosu na pročitano vrednost (eng. *accuracy*) i procentualne greške opsega koji se koristi za merenje (LSD). LSD (eng. *least significant digit*) je oznaka greške opsega koji se koristi za merenje i odgovara najmanjoj mogućoj vrednosti koju je moguće izmeriti na nekom opsegu. Ukupna greška merenja sa digitalnim instrumentom može se predstaviti sledećom relacijom:

$$\Delta_x = \frac{\delta_1}{100} X + \frac{\delta_2}{100} M \quad \text{Relacija 51}$$

Ili kao:

$$\Delta_x = \frac{\delta_1}{100} X + NR \quad \text{Relacija 52}$$

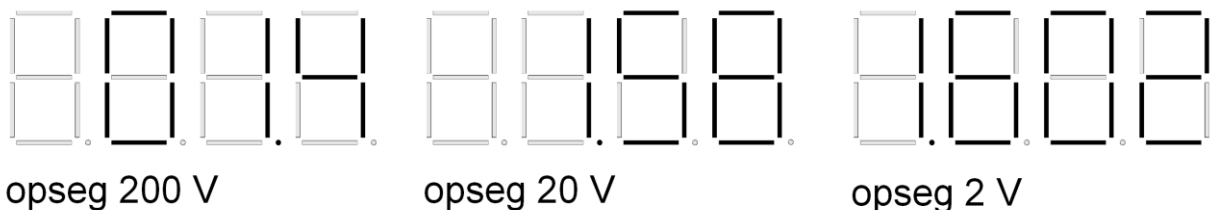
U relacijama 51-52 sa X je označena merena vrednost, sa Δ_x ukupna greška merenja digitalnim instrumentom, N je broj cifara najmanje težine za procenu opsega greške, R je rezolucija instrumenta, δ_1 je greška u odnosu na očitano vrednost i δ_2 je greška opsega na kom se meri.

Za slučaj da raspodela nije navedena ili na neki način eksperimentalno utvrđena, uvek se pretpostavlja da je raspodela greške uniformna, pa se merna nesigurnost tipa B računa kao:

$$u_B = \sigma = \frac{\Delta_x}{\sqrt{3}} \quad \text{Relacija 53}$$

2.3.2.1 Primer računanja merne nesigurnosti tipa B

Digitalnim voltmetrom sa 3½ cifara meri se napon od 1.6 V. Ako DMM za merenje DC napona ima tačnost definisanu kao $\pm(0.5\% + 3)$, potrebno je odrediti mernu nesigurnost tipa B za mereni napon [16].



Sl. 23. Za tačno očitavanje vrednosti napona sa digitalnog displeja DMM-a, potrebna je informacija o LSD i potrebno je odabrati najmanji mogući opseg. Na slici je prikazano merenje napona od 1.6 V za tri opsega: 200 V na levom panelu, 20 V na srednjem panelu i 2 V na desnom panelu. Na slici je ilustrovan primer koji je opisan u [16].

Najpre se DMM postavi na najveći opseg (200 V), kako je ranije opisano. Na displeju će se prikazati merena vrednost u oznaci 01.4 (slika 23), pa je merna nesigurnost (prema uputstvu proizvođača) jednaka $\frac{1.6 \times 0.5}{100} = 0.008$ V - ovu vrednost nije moguće prikazati na ekranu, jer je prikazana samo prva decimala (01.4). Međutim, ako se uzme u obzir da postoji 3 LSD-a, onda se dolazi do zaključka da poslednja cifra na displeju može da varira sa ± 3 brojanja. U tom slučaju, DMM može prikazati merenu vrednost sa sledećom nesigurnošću 1.6 ± 0.3 V (ovo je prikaz zaokružen na jednu decimalu kako pokazuje i DMM jer je greška od 0.008 V tada zanemariva) ili u opsegu [1.3 1.9] V. Za manji opseg (20 V) izmerena vrednost je 1.58 (slika 23), a merna nesigurnost $\pm \frac{1.6 \times 0.5}{100} + 0.03 = \pm 0.038$ V i procenjena vrednost se nalazi u opsegu [1.1562 1.638] V. Za najmanji opseg (2 V) izmerena je vrednost (slika 23) i merna nesigurnost $\pm \frac{1.6 \times 0.5}{100} + 0.003 = \pm 0.011$ V, pa se procenjena vrednost merenja nalazi u opsegu [1.1589 1.611] V. Zaključuje se da na tačnost merenja utiče u velikoj meri opseg na kom se meri zadata vrednost, odnosno rasipanje rezultata merenja oko tačne vrednosti je manje za odabir najmanjeg mogućeg opsega.

U prethodnom primeru prikazan je značaj odabira odgovarajućeg opsega i njegov uticaj na tačnost merenja digitalnim instrumentom. Kada se određuje merna nesigurnost tipa B digitalnih instrumenata, trebalo bi napomenuti da ne postoji standardizovan način na koji proizvođači navode podatke o tačnosti merenja.

Često se u praksi amplituda naponskih signala meri osciloskopom. Za računanje merne nesigurnosti tipa B potrebno je iz specifikacije osciloskopa pročitati podatke o broju bita A / D konverzije (rezolucija A / D konverzije) i podatke o tačnosti naponskog pojačanja [3].

2.3.3 Normalizacija rezultata merenja

Merena veličina i parametri okoline imaju određenu brzinu promene [9]. Većina laboratorijskih merenja ima statički karakter, odnosno merenje se obavlja nakon što se uspostavi stacionarno tj. ustaljeno stanje. Praktično nije moguće održati apsolutno stacionarno stanje i dinamička greška merenja je uvek prisutna.

U slučaju da je više ponovljenih merenja izvršeno na različitim skalama, potrebno je izvršiti normiranje tj. [normalizaciju](#) podataka pre dalje obrade tih podataka (na primer: pre računanja srednje vrednosti). Normalizacija se u opštem slučaju može odnositi na odgovarajuće proceduralne metode koje omogućavaju međusobno poređenje određenih podataka. U praksi, radi lakšeg računa, Gausovski raspodeljeni rezultati merenja se najčešće normalizuju tako da im je srednja vrednost 0, a varijansa 1. Na ovakvim signalima se dalje primenjuju različite metode obrade signala (bez umanjenja opštosti nakon normiranja srednje vrednosti i standardne devijacije). Slučajna promenljiva čije je matematičko očekivanje jednako 0 se takođe naziva i centrirana slučajna promenljiva.

Jedan praktičan primer normalizacije¹⁰ signala je za potrebe merenja biomedicinskih signala na osnovu kojih se vrši procena mišićne aktivnosti. Ova metoda merenja električnih signala mišića se naziva elektromiografija ([EMG](#)). Na primeru ovog signala biće objašnjena praktična potreba za normalizacijom signala.

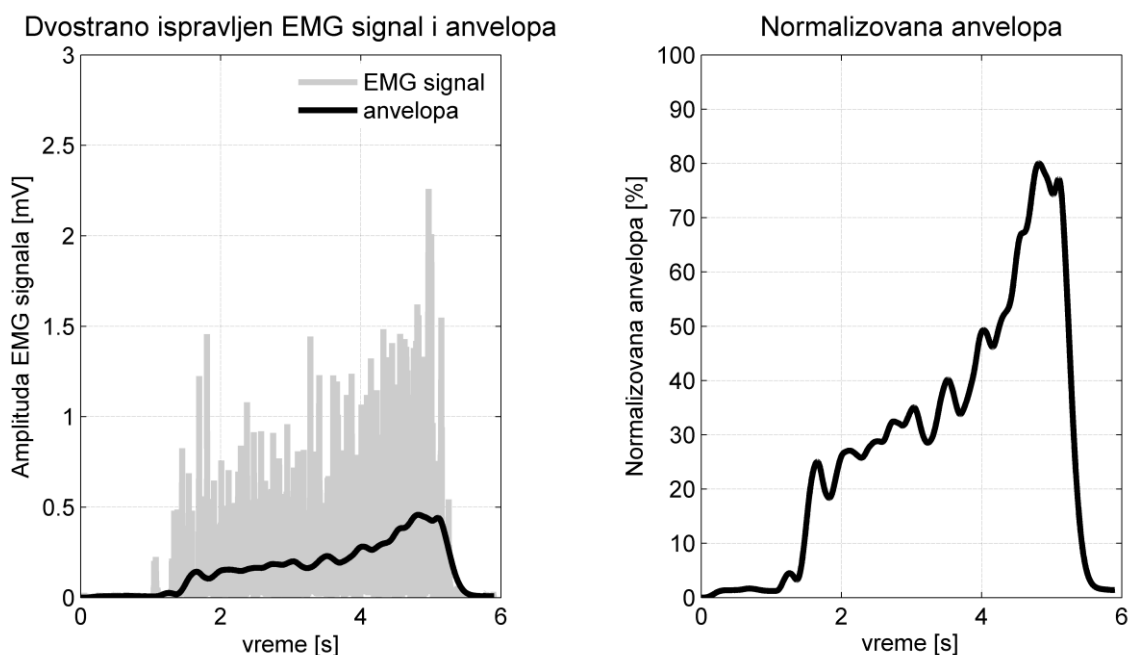
2.3.3.1 Praktični primer normalizacije signala

U biomedicinskoj tehnici je uobičajena normalizacija elektrofiziološkog EMG (elektromiografskog signala). Ovaj signal se meri primenom površinskih senzora koji se postavljaju na kožu ispitanika iznad mišića od interesa. Amplituda ovako izmerenog signala je u korelaciji sa mišićnom kontrakcijom. EMG signali imaju relativno malu amplituda (reda mV) i za njihovo merenje potrebno je primeniti odgovarajuće filtre i odgovarajuća pojačavačka kola kako bi se amplituda signala snimila korišćenjem A / D konvertora. Vrlo često se za prikaz ovih signala koristi i dvostrano ispravljanje, jer im je srednja vrednost jednaka 0. Na slici 24 na levom panelu dat je primer snimljenog i dvostrano ispravljenog EMG signala na zdravom ispitaniku na mišiću *Tibialis anterior* (latinski naziv). Metoda kojom je snimljen ovaj signal je detaljno opisana u [23]. Poseban praktični značaj merenja ovih signala je u poređenju signala koji su mereni na zdravim ispitanicima i na pacijentima kako bi se u kliničkim uslovima dijagnostikovao poremećaj u radu mišića.

¹⁰ U literaturi su podjednako zastupljeni termini normalizacija i normiranje signala. Normiranje se češće koristi kada je reč o Gausovoj raspodeli čija se srednja vrednost normalizuje na vrednost 0 i varijansa na vrednost 1.

Poznato je u biomedicinskoj tehnici da postoji relativno veliki broj faktora koji mogu da utiču na amplitudu EMG signala, pored intenziteta mišićne kontrakcije. Postoji relativno veliki broj "spoljašnjih" i "unutrašnjih" faktora koji utiču na amplitudu ovog signala [10]. Neki od tih parametara su: konfiguracija elektroda (njihov oblik, veličina, međusobna udaljenost), pravac postavljanja elektroda na kožu u odnosu na pravac prostiranja električnih potencijala mišića, impedansa kože, vlažnost i temperatura kože, anatomsko dimenzija i pozicija mišića, debljina masnog tkiva (izolatora) na mestu merenja i drugi. Svi ovi faktori su promenljivi u zavisnosti od eksperimentatora koji vrši merenje, u zavisnosti od primenjene merne opreme i u zavisnosti od ispitanika na kome se meri. Zbog svih ovih varijabilnih faktora, nije moguće porediti amplitude ovih signala. Zato se uvode posebni protokoli u kojima se definišu takvi uslovi merenja da se uticaj spoljašnjih faktora svodi na minimum. Kako se ne može uticati na unutrašnje faktore kao što su impedansa kože, debljina masnog tkiva na mestu merenja i slično, to se uvodi normalizacija signala.

Postoji niz predloženih metoda koje se koriste za normalizaciju EMG signala, ali je najrasprostranjeniji pomoću maksimalne voljne kontrakcije (MVK, eng. *Maximal Voluntary Contraction* - MVC). Normalizacija se sprovodi dodatnim referentnim merenjem MVK.



Sl. 24, Primer normalizacije EMG (elektromiografskog) signala. Na levom panelu prikazan je dvostrano ispravljen EMG signal zajedno sa anvelopom (obvojnicom) u mV. Kako bi se ovako snimljen signal mogao porediti sa signalima merenim u ponovljenim sesijama ili sa signalima merenim na drugim ispitanicima primenjuje se normalizacija u odnosu na maksimalnu voljnu kontrakciju i izražava u procentima (panel desno). U ovom primeru $v_{RMS} = 0.57$ mV.

U ovoj metodi, ispitanik izvodi MVK mišića koji se meri i na osnovu tog signala računa se RMS (eng. *Root Mean Square*) vrednost u mV, prema sledećoj formuli:

$$v_{RMS} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N v_i^2}$$

Relacija 54

U relaciji 54 sa N je označen broj odbiraka signala koji su mereni (zavisi od odabrane frekvencije odabiranja prilikom A / D konverzije, uobičajeno za EMG je 1000 Hz) i v_i su amplitude pojedinačnih merenja.

Dalje se za mereni signal koji je opisan sledećim odbircima $v_{mereno_1}, v_{mereno_2}, \dots, v_{mereno_n}$ svaki od izmerenih odbiraka deli sa v_{RMS} koje je proračunato za maksimalnu voljnu kontrakciju i računaju se vrednosti u procentima. Vrlo često se za vizuelizaciju ovih signala koriste filtri tako da se umesto dvostrano ispravljenog signala posmatra i normalizuje anvelopa (obvojnica) tog signala kao na slici 24. Postupak normalizacije anvelope se izvodi prema gorepomenutoj proceduri.

Nekada se normalizacija EMG signala vrši u odnosu na amplitudu nekog drugog parametra koji je proračunat za EMG signal snimljen tokom izvođenja referentnog pokreta, pa vrednost normalizovanog signala može biti i veća od 100%. Generalno, bez obzira da li se radi o biomedicinskim signalima (kao što je EMG) ili drugim električnim signalima, potrebno je dobro poznavanje mernih tehnika kako bi se na odgovarajuć način odredila procedura normalizacije signala i vrednost u odnosu na koju se normalizuje merena veličina.

2.4 Kombinovana merna nesigurnost

Kombinovana i odgovarajuća proširena merna nesigurnost predstavlja rezultantu više različitih nesigurnosti i ona je krajnji cilj merenja [34]. Određuje se za:

1. Merenje koje je ponovljeno n puta za koje je određena merna nesigurnost tipa A, a iz raspoloživih znanja o merenju (o instrumentu i metodi) je određena i merna nesigurnost tipa B.
2. Izvršeno je jedno merenje ($n = 1$) i analizom je utvrđeno da postoji određen broj veličina koje utiču na mernu nesigurnost tipa B (u_{B1}, u_{B2}, \dots).

Kod računanja kombinovane merne nesigurnosti, može se primeniti Zakon propagacije nesigurnosti [9] prema sledećoj formuli:

$$\Delta z = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial w_i} \Delta w_i$$

Relacija 55

Prethodna formula data u relaciji 55 pokazuje kako promena direktno merene veličine (Δw_i) i njena merna nesigurnost utiču na nesigurnost indirektno merene veličine z . Zavisnost indirektno i direktno merenih veličina data je izrazom:

$$z = f(w_1, w_2, \dots, w_N)$$

Relacija 56

Zakon propagacije merne nesigurnosti nije primenjiv na interval poverenja. Za primenu ove formule na interval poverenja raspodela svih direktno merenih veličina (w_i) mora biti Gausova. Način određivanja intervala poverenja prevazilazi gradivo koje je obuhvaćeno ovim udžbenikom, pa se i ne razmatra ovde za raspodele koje nisu Gausove.

Može se računati merna nesigurnost direktno i indirektno merene veličine. Pod direktnim merenjem podrazumeva se merenje kod koga se neposredno meri (i očitava) vrednost električne veličine. Na primer, merenje otpornosti ommetrom je direktno merenje bez obzira što se u samom instrumentu zapravo meri napon, ali se sa instrumenta očitava direktno vrednost u Ω .

Indirektno ili posredno merenje uključuje merenje jedne ili više (generalno N veličina) električnih (u opštem slučaju fizičkih) direktno merenih veličina $[x_1, x_2, \dots, x_N]$ i proračun merene vrednosti y na osnovu relacije:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)^{11}$$

Relacija 57

Iz relacije 57 se jednostavno zaključuje da je indirektno merenje rezultat funkcija nekoliko procenjenih vrednosti veličina koje se direktno mere. Merenje otpornosti merenjem struje i napona (primenom ampermetra i voltmetra) je primer indirektnog merenja otpornosti.

Računanje merne nesigurnosti indirektno merenih veličina se razlikuje u slučaju nekorelisanih i korelisanih veličina, pa će ova dva slučaja biti posebno razmotrena u sledeća dva poglavlja.

Kada se govori i korelisanosti odnosno nekorelisanosti misli se na slučajne promenljive, a ne na fizičke veličine za koje se usvaja pretpostavka da su invarijantne tj. nepromenljive u vremenu. Značajna korelacija praktično postoji između dve fizičke veličine, ako je korišćen isti instrument za merenje, isti merni standard ili je korišćen isti referentni podatak prilikom određivanja merne nesigurnosti.

U praksi je najčešći slučaj da ne postoji korelacija i da su efekti koji su korelisani zanemarivi. U sledećem poglavlju je opisan relativno redak slučaj računanja kombinovane merne nesigurnosti u slučaju korelisanih veličina.

2.4.1 Kombinovana merna nesigurnost nekorelisanih veličina

Za dve veličine se smatra da su nekorelisane, ako promena jedne veličine ne izaziva predvidljivu promenu druge veličine. Ako se posmatraju standardna odstupanja indirektno merenih veličina:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Relacija 58

¹¹ Funkcija f u opštem slučaju sadrži i sistematske efekte, a ne samo zavisnost električnih (u opštem slučaju fizičkih) veličina.

gde merene veličine x_i imaju slučajne greške, onda se te slučajne greške smatraju uzajamno statistički nezavisnim, odnosno nekorelisanim veličinama. Statistička zavisnost je "strožiji" kriterijum od korelisanosti u statistici. Tada je standardno odstupanje indirektno merene veličine dato sledećim izrazom:

$$s_y = \sqrt{\sum \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 s_{x_i}^2 \right]} \quad \text{Relacija 59}$$

U izrazu datom u relaciji 59 sa s_{x_i} predstavljeno je standardno odstupanje merene veličine x_i . Parcijalni izvod u prethodnoj relaciji ima praktični značaj jer pokazuje kakav uticaj ima x_i na ukupnu relaciju f odnosno na indirektno merenu veličinu y . Ovi parcijalni izvodi se nekad označavaju kao težinski koeficijenti c_i koji se dodeljuje svakoj mernoj nesigurnosti koja se računa za svako direktno merenje x_i .

Nekada se koeficijenti c_i , osim analitički kao u prethodnom izrazu, mogu odrediti eksperimentalno tako što se meri promena Δy koja je izazvana promenom odgovarajuće veličine x_i , dok su ostale $x_j, j \neq i$ konstantne.

Za računanje merne nesigurnosti indirektnog merenja u_y , koriste se parcijalni izvodi direktno merenih veličina x_i i pojedinačne kombinovane merne nesigurnosti u_{x_i} za direktno merene veličine. Izraz za računanje merne nesigurnosti kod indirektnog merenja je:

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u_{x_i} \right)^2} \quad \text{Relacija 60}$$

Izraz dat u relaciji 60 važi pod uslovom da su direktno merene veličine $[x_1, x_2, \dots, x_N]$ nekorelisane. Pod fizičkim veličinama koje su [korelisane](#) podrazumeva se međusobna povezanost tih veličina tako da se na osnovu vrednosti jedne fizičke veličine može sa određenom verovatnoćom odrediti druga veličina. Korelisane veličine ne moraju nužno biti nezavisne.

Na primer, ako bi se nepoznata otpornost merila tako da se meri napon na otporniku voltmetrom, a sa dva ampermetra se meri struja kroz oba terminala, onda su merenja ova dva ampermetra korelisana (u ovom slučaju su ista), pa se nepoznata otpornost i njena merna nesigurnost određuju samo pomoću voltmetra i jednog ampermetra.

U prethodnom izrazu sa u_{x_i} predstavljena je merna nesigurnost merene veličine x_i . Ovaj izraz važi isključivo kada su merene veličine x_i međusobno nekorelisane. Ovakav način računanja merne nesigurnosti se zasniva na [Tejlorovom nizu](#) prvog reda. Međutim, u slučaju da je funkcija f "visoko" nelinearna onda se računa Tejlorov niz drugog reda koji se ne može u tom slučaju zanemariti. Ako se koeficijenti c_i određuju eksperimentalno, onda se usvaja da se radi o oTejlorovom nizu prvog reda, jer u tom slučaju matematički model funkcije f ne postoji, pa nelinearnost i viši redovi Tejlorovog niza nisu poznati. U praksi se usvaja da se i nelinearni modeli f transformišu u linearne funkcije (uspostavlja se linearna zavisnost između y i x_i).

Na primer, ovaj izraz se koristi ako se meri gustina nekog tela ρ na osnovu merenja mase m i zapremine V na osnovu izraza:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Relacija 61

Kako se masa i zapremina mere različitim instrumentima (npr. vaga i menzura) i obzirom da je rad ova dva instrumenta (merne metode) nezavisan onda su i merne nesigurnosti ovih veličina statistički nezavisne.

2.4.1.1 Primer računanja merne nesigurnosti kod indirektnog merenja

Pod pretpostavkom da su unutrašnje otpornosti ampermetra, voltmetra i izvora jednosmernog napona idealne, da je faktor proširenja $k = 2$, da je $E = 12 \text{ V}$ i da su svi instrumenti pravilno kalibrisani, izračunati mernu nesigurnost tipa A za merenje nepoznate otpornosti R_x u slučaju: 1) direktnog merenja i 2) indirektnog merenja. Izmerene vrednosti otpornosti (Ω) ommetrom, napona (V) voltmetrom i struje (mA) ampermetrom za ponovljena merenja date su u tabeli 5. Električna šema mernog kola data je na slici 25.

Tabela 5, Rezultati merenja nepoznate otpornosti indirektnom metodom.

R_x [Ω]	802	806	807	809	809	810	811	812	808	810
U_i [V]	12.00	12.10	11.80	12.20	12.30	11.50	12.00	12.08	12.10	11.90
I_i [mA]	13.50	14.60	14.80	13.90	14.70	14.00	14.90	13.80	13.90	14.40

Za indirektno merenje nepoznate otpornosti prema kolu sa slike 25 koristi se sledeći izraz:

$$R_x = \frac{U}{I}$$

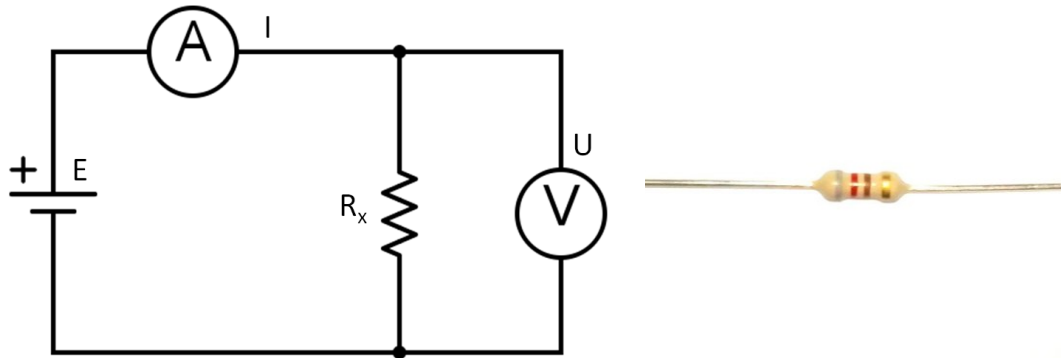
U prethodnom izrazu sa U je označena procenjena vrednost napona na osnovu izvršenih merenja koja su data u tabeli 5, odnosno srednja vrednost merenog napona, a sa I je predstavljena srednja vrednost merene struje.

Ako su sa u_v i sa u_i označene merne nesigurnosti za merenje napona i struje, respektivno, onda je moguće izračunati mernu nesigurnost u_{rx} indirektnog merenja nepoznate otpornosti na sledeći način:

$$u_{rx} = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial R_x}{\partial U}\right| u_v\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial R_x}{\partial I}\right| u_i\right)^2}$$

$$u_{rx} = \sqrt{\left(\frac{1}{I} u_v\right)^2 + \left(\frac{U}{I^2} u_i\right)^2}$$

Za otpornik sa slike 25 moguće odrediti nominalnu vrednost pomoću *Color Code* šeme (kako je ranije opisano). Poređenjem nominalne vrednosti otporosti sa vrednostima koje su dobijene direktnim i indirektnim merenjem u prethodnom zadatku moguće je izračunati apsolutnu i relativnu grešku merenja.



Sl. 25, Naponska veza za indirektno merenje nepoznate otpornosti. Fotografija otpornika čija je se otpornost meri je prikazana na desnom panelu.

2.4.2 Kombinovana merna nesigurnost korelisanih veličina

Ako se razmatraju sistematske greške indirektno merenih veličina koje se mogu izraziti u obliku:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \quad \text{Relacija 62}$$

tada se za računanje sistematske greške veličine y koristi relacija:

$$\Delta y = \sum \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \quad \text{Relacija 63}$$

Onda se merna nesigurnost tipa B indirektno merene veličine y za slučaj kada su merene veličine x_i u potpunosti korelisane dobija se:

$$u_y = \sum \frac{\partial y}{\partial x_i} u_{x_i} \quad \text{Relacija 64}$$

Kako bi se ispitala korelisanost dve promenljive ili dva niza promenljivih uveden je pojam koeficijenta korelacije u oznaci $r(x_1, x_2)$ kao bezdimenziona veličina koja može da uzima vrednosti u intervalu $-1 \leq r \leq 1$. Ovaj koeficijent izražava uzajamnu statističku zavisnost veličina x_1 i x_2 . Maksimalna vrednost

apsolutnog koeficijenta korelacije $|r(x_1, x_2)| = 1$, označava da su veličine korelisane u potpunosti, odnosno da su povezane matematičkim izrazom:

$$x_1 = ax_2 + b \quad \text{Relacija 65}$$

U relaciji 65 sa a i b su označene poznate konstante. Ovaj izraz označava da su veličine u potpunosti određene jedna drugom, odnosno kada je jedna poznata na osnovu relacije 65 je moguće jednostavno odrediti drugu veličinu.

Veličine su međusobno potpuno statistički nezavisne odnosno nekorelisane kada je koeficijent korelacije približno jednak nuli $|r(x_1, x_2)| \approx 0$. U praksi se ova dva slučaja retko sreću, odnosno, najčešći slučaj je da koeficijent korelacije uzima neku vrednost na intervalu $0 < |r(x_i, x_j)| < 1$.

Da bi se izračunala kombinovana merna nesigurnost nekorelisanih slučajnih promenljivih potrebno je uzeti u obzir kovarijansu. Stepenn korelacije između x_i i x_j se računa preko koeficijenta korelacije. Opšta formula za koeficijent korelacije $r(x_i, x_j)$ je:

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \quad \text{Relacija 66}$$

Za koeficijent korelacije važi: $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$. Za nezavisne x_i i x_j važi da je koeficijent korelacije $r(x_i, x_j) = 0$.

Kovarijansa (eng. [covariance](#)) služi da se definiše mera međusobne zavisnosti dve slučajne promenljive. Za slučajne promenljive y i z , kovarijansa je definisana kao:

$$\text{cov}(y, z) = E\{[y - E(y)][z - E(z)]\} \quad \text{Relacija 67}$$

Za kovarijansu važi da je $\text{cov}(y, z) = \text{cov}(z, y)$. Za uzorak n , kovarijansa se definiše kao:

$$S(y_i, z_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})(z_j - \bar{z}) \quad \text{Relacija 68}$$

U prethodnom izrazu $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ i $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$ su srednje vrednosti slučajnih promenljivih y i z . Za kovarijansu srednjih vrednosti dve slučajne promenljive, važi sledeća relacija:

$$S(\bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{n} S(y_i, z_i) \quad \text{Relacija 69}$$

Koeficijent korelacije $\rho(y, z)$ se takođe može izraziti preko kovarijansi kao odnos kovarijansi i kvadrata varijansi slučajnih promenljivih:

$$\rho(y, z) = \frac{\text{cov}(y, z)}{\sigma(y)\sigma(z)} \quad \text{Relacija 70}$$

Za koeficijent korelacije važi: $\rho(y, z) = \rho(z, y)$ i on definiše meru relativne međusobne zavisnosti dve promenljive. Izraz dat u relaciji 70 se odnosi na populaciju, a za uzorak važi:

$$r(y_i, z_i) = \frac{S(y_i, z_i)}{\sqrt{s(y_i, y_i)s(z_i, z_i)}}$$

Relacija 71

$$r(y_i, z_i) = \frac{S(y_i, z_i)}{s(y_i)s(z_i)}$$

Relacija 72

Za nezavisne slučajne promenljive koeficijent korelacije i kovarijansa su jednake 0. Za računanje merne nesigurnosti korelisanih veličina, neophodno je predstaviti koeficijente korelacije i kovarijanse sa rezultatom merenja. Dalji račun merne nesigurnosti prevazilazi gradivo koje je predstavljeno u ovom udžbeniku i detaljan račun se može naći u [9, 27, 34].

2.4.3 Kombinovana merna nesigurnost i sistematski efekti

Nekada nije moguće izvršiti kalibraciju ni snimiti kalibracionu krivu $b(t)$. Tada se procenjuje sistematska korekcija rezultata merenja u oznaci \bar{b} i računa se prema formuli [9]:

$$\bar{b} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} b(t) dt$$

Relacija 73

Procenjena merna nesigurnost je u tom slučaju jednaka:

$$\bar{u}[b(t)] = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2[b(t)] dt}$$

$$u[\bar{b}] = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (b(t) - \bar{b})^2 dt}$$

Sada se kombinovana merna nesigurnost računa prema formuli:

$$u_c = \sqrt{u^2[y(t)] + \bar{u}^2[b(t)] + u^2(\bar{b})}$$

Relacija 74

Dalje se računa proširena merna nesigurnost na osnovu faktora proširenja k kao $U = ku_c$ i rezultat merenja se predstavlja kao:

$$y(t) + \bar{b} \pm U$$

Relacija 75

2.4.4 Primer računanja kombinovane merne nesigurnosti

Kada su poznate merne nesigurnosti tipa A i tipa B, ukupna / kombinovana merna nesigurnost u slučaju nekorelisanih veličina se dobija kao:

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad \text{Relacija 76}$$

Neka je na primer potrebno odrediti kombinovanu mernu nesigurnost za faktor proširenja $k = 2$ prilikom merenja struje analognim ampermetrom. Rezultati $n = 8$ ponovljenih merenja su dati u tabeli 6. Opseg mernog instrumenta je $I_{max} = 3$ A, tačnost očitavanja (iz specifikacije proizvođača) je $\pm 0.04\%$, a tačnost opsega (iz specifikacije proizvođača) je $\pm 0.007\%$. Smatrati da je unutrašnja otpornost ampermetra dovoljno mala i da se svi sistematski efekti mogu zanemariti. Pretpostaviti Gausovu raspodelu za ponovljena merenja i uniformnu raspodelu za računanje merne nesigurnosti tipa B.

Za rezultate merenja koji su dati u tabeli 6, moguće je izračunati srednju vrednost struje kao:

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i = 1.02 \text{ A}$$

Merna nesigurnost tipa A (kao standardna devijacija od srednje vrednosti sa Beselovom korekcijom) je:

$$u_A = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2} = 0.0255 \text{ A}$$

Merna nesigurnost tipa B se može izraziti kao:

$$u_B = \frac{\frac{\delta_1}{100} I_{max} + \frac{\delta_2}{100} \bar{I}}{\sqrt{3}} = 0.0004 \text{ A}$$

Tabela 6, Vrednosti ponovljenih merenja struje

redni broj merenja	1	2	3	4	5	6	7	8
I [A]	0.98	0.90	1.10	1.00	1.05	0.97	1.12	1.03

Sada se na osnovu prethodna dva izraza dobija kombinovana merna nesigurnost:

$$u_C = 0.03 \text{ A}$$

U ovom slučaju se uticaj merne nesigurnosti tipa B može i zanemariti jer je $u_C \approx u_A$. Za faktor proširenja $k = 2$, dobija se rezultat merenja oblika:

$$I = 1.02 \pm 0.06 \text{ A.}$$

2.5 Izveštaj rezultata merenja i uticaj merene veličine na mernu nesigurnost

Svako merenje, osim na odgovarajuć način procenjene merene vrednosti i merne nesigurnosti, mora da sadrži i precizno (tehničkom terminologijom) opisanu metodu merenja, merenu veličinu i uslove pod kojima je izvršeno merenje. Što je merenje većeg značaja i što se traži veća tačnost i preciznost merenja, to su ovi kriterijumi predstavljanja rezultata strožiji [34].

Na primer, za merenje struje U / I metodom, uzimaju se u obzir (bez obzira na ispunjenost preduslova za primenu merenja):

1. ulazna otpornost voltmetra,
2. ulazna otpornost ampermetra,
3. otpornosti priključnih provodnika,
4. vremenska nestabilnost struje i
5. drugo.

Merenja koja su od velikog značaja za koje je potrebno izvesti merenje relativno velike tačnosti su [34]:

1. Određivanje vrednosti neke fundamentalne fizičke konstante (npr. [Avogadrovog broja](#)).
2. Merenje mehaničkih, termičkih i / ili električnih parametara materijala (npr. toplotne provodnosti, dielektrične konstante).

Vrlo često se poređenjem rezultata merenja primenom različitih metoda za dve iste fizičke veličine dolazi do korisnih saznanja o toj veličini i proceni merne nesigurnosti. Dodatno, ako bi više insitucija koje su fizički odvojene (nalaze se u različitim državama, kontinentima) merile istom metodom istu fizičku veličinu dobile bi se različite srednje vrednosti i različite merne nesigurnosti. Na osnovu tako dobijenih rezultata usvaja se zajednička srednja vrednost i merna nesigurnost. Najveći uticaj (težinu) u tom slučaju na konačnu vrednost imaju pojedinačni rezultati kojima je pridružena najmanja merna nesigurnost [34].

Generalno, izveštaj merenja bi trebalo da sadrži [9]:

1. Opis metode koja je korišćena da se dođe do rezultata merenja i da se izračunaju rezultati merenja i merna nesigurnost iz eksperimentalnih merenja ili na osnovu ulaznih podataka (iz specifikacije proizvođača ili prethodnih saznanja).
2. Listu svih mernih nesigurnosti koje su dobijene direktnim merenjem i dodatnim opisima. Dodatni opisi mogu da sadrže i kovarijansne i korelacione matrice u slučaju procene merne nesigurnosti kod indirektnog merenja.
3. Detaljnu analizu podataka koja je primenjena (na primer opis primenjene metode za normalizaciju rezultata merenja), tako da se omogući jednostavna reprodukcija rezultata merenja i analize sa istom mernom opremom i mernom metodom.
4. Spisak konstanti i korekcija (na primer prilikom određivanja sistematskih efekata) koje su korišćene u računu, kao i način kako su one dobijene (iz literature ili iz eksperimentalnih opservacija).

Potrebno je uvek uz rezultat merenja pisati jedinice u kojima je rezultat predstavljen. Nekada se za ovakav izveštaj koristi termin i dnevnik merenja i u praksi je poželjno da je što iscrpniji u pogledu informacija koje sadrži.

U tabeli 7 [34] dati su primeri merenja koja se mogu sresti u praksi, a koja se razlikuju po određivanju merne nesigurnosti. Za primer I (videti tabelu 7) prikazano je merenje sa jednim merenim podatkom x_1 za koji ne postoje podaci ni o instrumentu ni o načinu na koji je rezultat dobijen. Ovo merenje predstavlja samo okvirni podatak o merenoj veličini, a nema veliku vrednost jer ne postoje podaci na osnovu kojih se može proceniti merna nesigurnost.

Tabela 7, Primeri merenja, načina računanja merne nesigurnosti i procenjen značaj predstavljenih merenja. Tabela je prikazana u skladu sa primerom koji je predstavljen u [34].

primer	broj merenja	podaci	merna nesigurnost	rezultat	raspodela	značaj merenja
I	1	ne postoje	--	x_1	--	relativno mali
II	$n \gg 1$	statistička obrada	$A, u_A = \frac{s}{\sqrt{n}}$	$x_s \pm ku_A$	Gausova	veći od I
III	1	sistematski uticaj	B, u_B	$x_s \pm ku_B$	zavis od sistematskog uticaja	veći od I
IV	1	svi sistematski uticaji	kombinovana B, u_{CB}	$x_s \pm ku_{CB}$		veći od II i III
V	$n \gg 1$	statistička obrada i svi sistematski uticaji	kombinovana A i B, u_{CAB}	$x_s \pm ku_{CAB}$	skoncentrisana (Gausova, Studentova ili trougaona)	veći od I-IV
VI	$n \gg 1$	statistička obrada i svi sistematski uticaji				maksimalan

U II primeru u tabeli 7 prikaz je primer računanja merne nesigurnosti za rezultat koji je dobijen ponovljenim merenjima, kada ne postoje podaci o korišćenoj mernoj opremi. Ovaj rezultat ima veći značaj od prethodnog, jer se sa ponovljenim merenjima može odrediti merna nesigurnost tipa A. Ako se u ovom primeru izvrši i kalibracija instrumenta i izračuna sistematska greška (sistematski efekat), onda se može izvršiti odgovarajuća korekcija srednje vrednosti.

Primer III u tabeli 7 prikazuje slučaj pojedinačnog merenja (raspolaze se jednim podatkom) i mouće je odrediti samo mernu nesigurnost tipa B na osnovu podataka o korišćenom mernom instrumentu tj. mernoj metodi.

U vrsti IV u tabeli 7 je prikazan primer pojedinačnog merenja pri čemu je poznato više uzoraka od kojih zavisi merna nesigurnost tipa B i na osnovu kojih se dalje može proračunati kombinovana merna nesigurnost. Koja će se formula za računanje kombinovane merne nesigurnosti primeniti zavisi od toga da li postoji korelacija između efekata koji utiču na mernu nesigurnosti ili ne postoji, kako je ranije objašnjeno u udžbeniku.

Primer V (iz tabele 7) se odnosi na rezultate ponovljenih merenja u kom su proučeni i svi sistematski efekti koji utiču na mernu nesigurnost. U ovom slučaju određuje se merna nesigurnost tipa A, potom kombinovana merna nesigurnost tipa B i na kraju ukupna kombinovana merna nesigurnost. Merne nesigurnosti tipa A i tipa B se smatraju nekoreliranim veličinama. Ovo su u odnosu na ostale primere (I-IV iz tabele 7), merenja većeg zanačaja.

Za merenja najveće moguće tačnosti predstavljen je primer u vrsti VI u tabeli 7. U obzir su uzeti svi sistematski efekti (kao u primeru V) na osnovu kojih se određuje kombinovana merna nesigurnost tipa B, ali je na osnovu ponovljenih merenja dodatno izračunata i merna nesigurnost tipa A.

2.6 Merna nesigurnost - dodatna razmatranja i rezime

Merenje je skup operacija čiji je cilj da se odredi kvantitativna vrednost merene veličine [9]. Merna metoda uključuje sekvencu operacija koje se koriste u realizaciji merenja, dok je merna procedura skup specifičnih operacija koje se koriste kako bi se izvršilo merenje koje odgovara odabranoj mernoj metodi.

Rezultat merenja je kvantitativna vrednost koja se dodeljuje merenoj veličini primenom merne procedure [9], a tačnost merenja se definiše kao razlika rezultata i uslovno tačne (referentne, nominalne) vrednosti merene veličine. Ovde je tačna vrednost uslovno tačna jer je ona usvojena nekom konvencijom, jer je tačna vrednost idealizovan koncept (koji u praksi ne postoji). Konvencionalno tačna vrednost je dobijena pod takvim uslovima da su sistematski efekti i merna nesigurnost minimalni. Za veću tačnost manja je greška merenja koja se definiše kao apsolutna razlika merene veličine i tačne vrednosti (apsolutna greška). Pored apsolutne greške moguće je definisati i relativnu grešku (videti ranija poglavlja).

Ponovljivost rezultata merenja (eng. *repeatability*) definiše slaganje rezultata merenja dobijenih iz više sukcesivnih merenja koji su izvedeni pod istim (ponovljivim) mernim uslovima. Pod ponovljivim uslovima merenja može se smatrati:

1. ista procedura merenja,
2. ista osoba koja sprovodi merenja,
3. isti instrument koji se koristi pod istim uslovima,
4. ista lokacija merenja i
5. postignuta ponovljivost u kratkom vremenskom roku (merenja su izvršena unutar granica kalibracije).

Reproduktivnost rezultata merenja (eng. *reproducibility*) podrazumeva slaganje rezultata merenja iste fizičke veličine pod promenljivim uslovima merenja. Promenljivi uslovi merenja mogu biti svi gorenavedeni uslovi merenja.

U [9] navode se praktične napomene o postupku za računanje merne nesigurnosti, pa Autor ove napomene ovde navodi kao opštu smernicu svima koji žele da se bave električnim merenjima.

Osim merne nesigurnosti rezultata merenja, nekada se računa i nesigurnost merne metode. Jedan od načina da se ovo ostvari je da se realizuje poređenje mernih nesigurnosti rezultata merenja koje se dobijaju primenom različitih mernih metoda. Ovakva eksperimentalna procedura se nekada sprovodi i sa ciljem identifikacije sistematskih efekata koji su svojstveni nekoj metodi.

U praksi se dodatno može javiti varijabilnost na nivou ponovljenih merenja koje vrši jedan ispitivač (eng. [intra-rater reliability](#)) i na nivou ponovljenih merenja koje vrše različiti ispitivači (različiti timovi i institucije, eng. [inter-rater reliability](#)). Važno je napomenuti da je posebno u medicinskih primenama za ocenu dijagnostičkih metoda od velikog značaja kada se procenjuje pouzdanost (eng. [statistics reliability](#)) neke dijagnostičke metode na osnovu *intra* i *inter-rater* pouzdanosti.

Kombinovana merna nesigurnost uključuje uticaj merne nesigurnosti tipa A (izračunatu na osnovu ponovljenih merenja) i merne nesigurnosti tipa B (određenu na osnovu podataka proizvođača) i predstavlja ukupnu mernu nesigurnost nekog merenja. U praksi, najčešće se merna nesigurnost tipa B može zanemariti u odnosu na mernu nesigurnost tipa A, pa je od presudnog značaja računanje merne nesigurnosti tipa A na osnovu ponovljenih merenja.

Treba napomenuti da se način izražavanja merne nesigurnosti razlikuje od vrste merenja i univerzalni postupak definisanja merne nesigurnosti ne postoji. Nijedno uputstvo, knjiga ni primer ne mogu da zamene kritičko razmišljanje, intelektualnu iskrenost i profesionalnu veštinu koji su od ključne vrednosti za stručno obavljeno merenje. Metoda računanja merne nesigurnosti nije ni rutinski ni matematički zadatak i ne postoji egzaktno uputstvo po kom će se ona računati. Svaki primer podleže odgovarajućim modifikacijama predstavljenih metoda računanja merne nesigurnosti i njihovom kombinacijom koja je rezultat poznavanja prirode merene vrednosti i primenjene metode.

Ukratko, razumevanje, kritička analiza i integritet osobe koja sporovodi merenje su od ključnog značaja za uspešno izvršeno merenje i izračunatu mernu nesigurnost u praksi.

Treba imati na umu da se veliki broj rezultata u industriji objavljuje bez informacije o mernoj nesigurnosti i da je glavni razlog tome primena zakonskih regulativa za korišćene instrumente koji se redovno kalibrišu i proveravaju od strane regulatornog tela. Na taj način se definisanim pravnim postupkom garantuje određena tačnost i preciznost objavljenih rezultata. Merna nesigurnost se u nekim praktičnim primenama takođe zanemaruje ako se proceni da je manja u odnosu na ostale nesigurnosti ili ako je značajno manja u odnosu na sistematsku grešku.

Do sada je merna nesigurnost (tipa A, tipa B, kombinovana i merna nesigurnost dobijena indirektnim merenjem) bila objašnjena na osnovu eksperimentalno dobijene ili pretpostavljene raspodele rezultata merenja. Međutim, za neke primere niti postoji dovoljno eksperimentalnih rezultata niti postoji dovoljno podataka na osnovu kojih se raspodela može pretpostaviti. U tom slučaju se merna nesigurnost ne računa, ali postoji način da se takav rezultat merenja predstavi. Primer takvog merenja je merenje za koje se pretpostavlja da opisuje više klasa / pojava ili kada je primena Studentove raspodele kompleksna.

Takvi mogu biti rezultati merenja električnih signala sa senzora. U sledećem poglavlju date su opšte smernice za predstavljanje rezultata takvih merenja.

2.6.1 Predstavljanje rezultata merenja pomoću medijane i kvartila

Kada ne postoji informacija o raspodeli, rezultat merenja predstavlja se pomoću medijana i kvartila. Medijana M se na diskretnom skupu merenih podataka (x_1, \dots, x_n) definiše posebno za neparan i za paran broj merenih podataka n :

$$M = \frac{x_{n+1}}{2} \quad \text{mod}(n, 2) = 1$$

$$M = \frac{\frac{x_n}{2} + \frac{x_{n+1}}{2}}{2} \quad \text{mod}(n, 2) = 0 \quad \text{Relacija 77}$$

Srednja vrednost položaja koja deli niz merenih vrednosti na dva jednaka dela se naziva medijana. Za prikaz rezultata pomoću medijane, nije potrebno prethodno poznavanje raspodele, ali jeste pogodno, ako je distribucija podataka oko medijane simetrična. Za Gausovu raspodelu, medijana je jednaka srednjoj vrednosti tj. matematičkom očekivanju Gausove raspodele.

Medijana je, kao i srednja vrednost, mera centralne tendencije nekog skupa podataka. Medijana je manje osetljiva na ekstremne vrednosti u skupu merenih podataka u odnosu na srednju vrednost. Razlog tome je što na medijanu utiče poredak merenih vrednosti u većoj meri od same kvantitativne vrednosti.

Za svaki skup merenih podataka se pored medijane definišu i kvartili. Definišu se kao srednje vrednosti položaja koje dele niz merenih vrednosti na četiri jednaka dela. Za jedan skup merenih podataka postoji tri kvartila q_1 , q_2 i q_3 . Prvi kvartil se nalazi u prvoj četvrtini merenih podataka (ispod njega se nalazi 25% podataka, a iznad 75% podataka), drugi je jednak medijani, a treći se nalazi u poslednjoj četvrtini merenih podataka (ispod njega se nalazi 75% podataka, a iznad njega se nalazi 25% podataka).

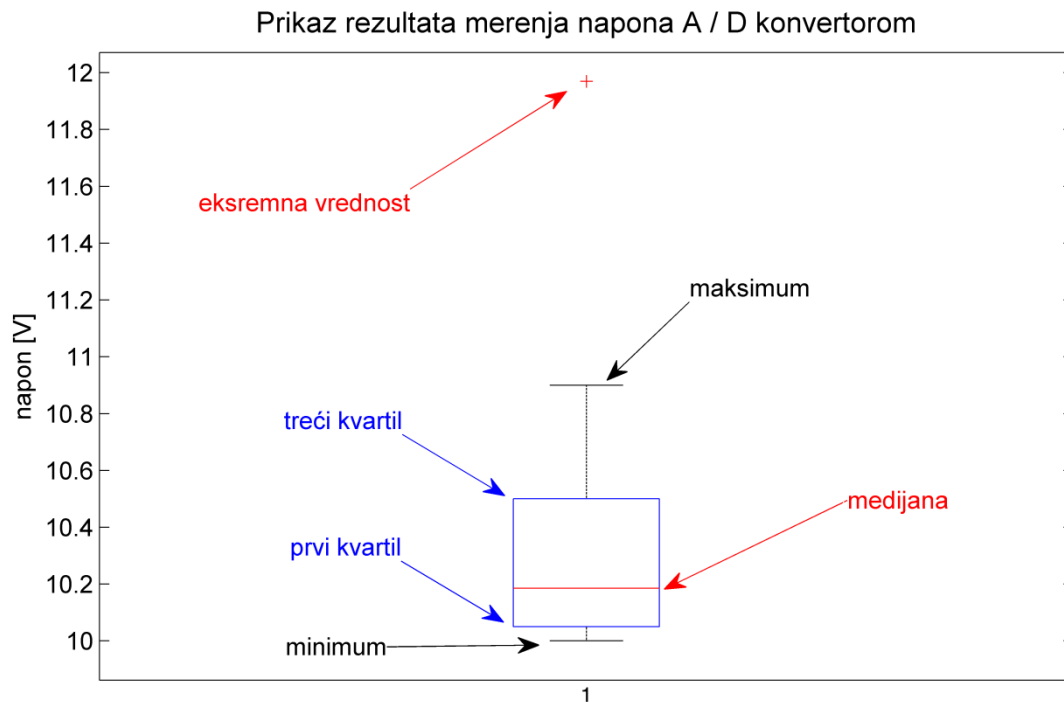
Na primer, za ponovljeno merenje ($n = 10$) napona U u prisustvu šuma primenom A / D konvertora relativno velike tačnosti čiji se uticaj na merenje može zanemariti, dobijene su brojne vrednosti prikazane u tabeli 8. Potrebno je izračunati medijanu (M) i prvi i treći kvartil (q_1 i q_3).

Tabela 8, Prikaz ponovljenih merenja ($n = 10$) za merenje napona U primenom A / D konvertora

redni broj merenja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U [V]	10.34	10.90	10.10	10.00	10.05	11.97	10.12	10.25	10.50	10.03

Najpre je potrebno poredati vrednosti po rastućem redosledu:

10.00 < 10.03 < 10.05 < 10.10 < 10.12 < 10.25 < 10.34 < 10.50 < 10.90 < 11.97 [V]



Sl. 26, Prikaz rezultata boks plotom za merenje napona A / D konvertorom pomoću medijane i kvartila. Osnovni elementi ovog grafika su obeleženi na slici.

Medijana prema formuli odgovara sledećoj vrednosti:

$$M = \frac{10.12 + 10.25}{2} = 10.185 \text{ V}$$

Primeru radi, srednja vrednost za ovaj niz izmerenih podataka je:

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^n U_i = 10.426 \text{ V}$$

Ovo može da posluži i kao provera Gausove funkcije gustine verovatnoće. Ovaj niz podataka sigurno nema Gausovu funkciju gustine verovatnoće, jer je $M \neq \bar{U}$. Takođe, na osnovu rezultata merenja primećuje se da ekstremna maksimalna vrednost napona $U_{max} = 11.97 \text{ V}$ utiče na srednju vrednost u većoj meri nego na medijanu.

Kvartili se mogu posmatrati kao medijana jedne polovine niza, pa se tako za dobijanje vrednosti prvog kvartila posmatra niz:

10.00 < 10.03 < 10.05 < 10.10 < 10.12 [V]

Sada se primenjuje relacija 77 za računanje medijane za niz sa neparnim brojem odbiraka, pa se za prvi kvartil dobija: $q_1 = 10.05$ V. Analogno, za treći kvartil se posmatra druga polovina niza merenih podataka:

$$10.25 < 10.34 < 10.50 < 10.90 < 11.97 \text{ [V]}$$

i dobija se $q_3 = 10.50$ V. Uobičajeno se kvartili predstavljaju preko boks plotova (eng. [box plot](#)). Na slici 26 je prikazan uobičajen boks plot prikaz medijane i kvartila za ovaj primer.

3 METODE ZA MERENJE ELEKTRIČNIH VELIČINA

Električni merni instrumenti se koriste sa ciljem neposrednog merenja električnih veličina ili njihovog odnosa [29]. Princip rada ovih instrumenata zasniva se na električnim pojavama koje će biti prikazane u ovom poglavlju i objašnjene na praktičnim primerima.

3.1 Merenje otpornosti

Otpornik (slika 27) je pasivni element (sa dva terminala / kraja) koji u električno kolo unosi električnu otpornost. Otpornici imaju karakteristiku elementa prema kojoj su napon i struja proporcionalni (Omov zakon):

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{Relacija 78}$$

Postoje otpornici koji imaju fiksnu (konstantnu) vrednost, ali i promenljivi otpornici (potenciometri, reostati). Otpornik je idealizovan element koji u potpunosti zadovoljava Omov zakon. Međutim, u praksi, otpornici uvek imaju i neke "parazitne" elemente.

Danas se u većini elektronskih kola i uređaja koriste SMD (eng. *Surface-Mount Components*) otpornici. Oni su manjih dimenzija i njihova dužina je u opsegu od 0.6 mm do 6.3 mm. Postoje i druge vrste otpornika. Otpornici koji postoje na tržištu se razlikuju, osim po dimenzijama i obliku, i po materijalima od kojih su napravljeni. Dva osnovna tipa otpornika su linearni i nelinearni. Kod nelinearnih otpornika, otpornost ne zavisi samo od napona i struje, već i od nekog drugog (spoljnog) električnog ili magnetnog polja. Na primer, termistori su nelinearni otpornici kod kojih otpornost zavisi i od temperature, a fotootpornici su otpornici kod kojih otpornost zavisi i od osvetljenja. Detalji o tipovima otpornika mogu se pogledati u [32].

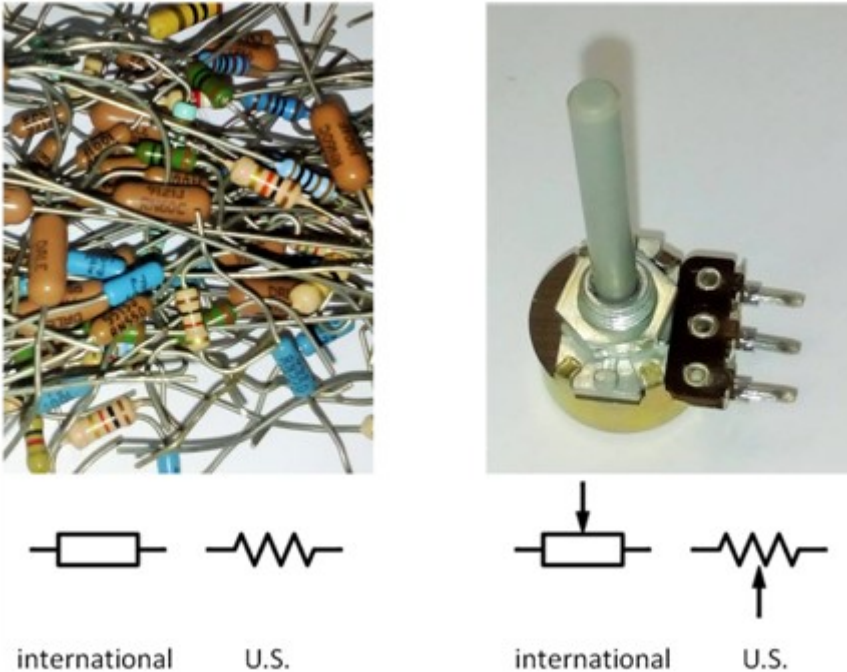
Prilikom odabira otpornika, treba voditi računa, osim o tome kolika je njegova otpornost i o tome kolika je snaga otpornika koji se koristi u električnom kolu. Otpornici se proizvode za različite maksimalne snage disipacije. Uobičajeno, za većinu kola, koriste se otpornici sa snagom disipacije od 0.25 W i 0.5 W.

Na primer, ako se na krajeve otpornika otpornosti od 250 Ω dovodi napon od 9 V, u tom slučaju, potrebno je upotrebiti otpornik snage:

$$P = \frac{V^2}{R} \quad \text{Relacija 79}$$

odnosno otpornik snage $P = 0.324$ W ili veće.

Otpornost je moguće meriti sledećim metodama: 1) ommetrom, 2) U/I metodom – korišćenje ampermetra i voltmetra, 3) metodom poređenja i 4) mernim mostovima.



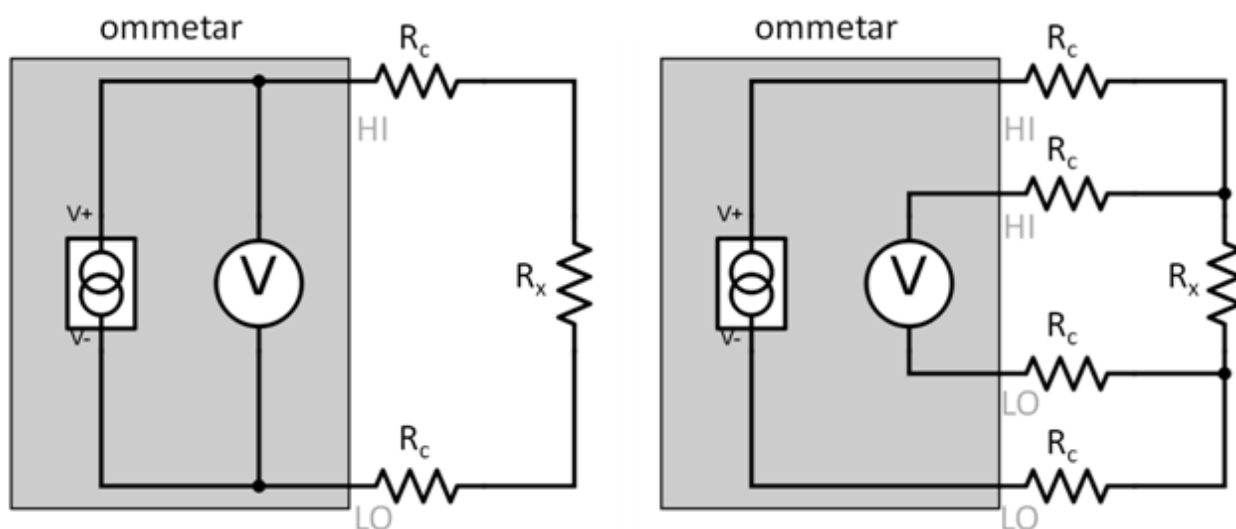
Sl. 27, Na levom panelu prikazana je fotografija [otpornika](#) i oznaka za otpornik po internacionalnoj (Int.) i U.S. nomenklaturi. Slično, na desnom panelu prikazana je fotografija [potenciometra](#) sa odgovarajućim oznakama.

3.1.1 Ommetar (digitalni multimeter)

Ommetar je najčešće korišćen instrument za merenje otpornosti otpornika. Ne koristi se kao poseban instrument i najčešće se ommetar nalazi u okviru digitalnog [multimetra](#) (unimer). Uobičajeno se projektuje tako da jedno elektronsko kolo unutar ommetra proizvodi konstantnu struju kroz otpornik, a drugo elektronsko kolo meri napon na otporniku. Otpornost se meri tako što se ommetar vezuje na krajeve / terminale otpornika.

Praktično, uvek postoji neka otpornost kablova R_c kojima se povezuje otpornik sa instrumentom, čija se otpornost meri. Na ovaj način nastaje sistematska greška u merenju, što je ranije već objašnjeno. Tu grešku je moguće zanemariti ako je otpornost koja se meri R_x mnogo veća od otpornosti kontakta $R_x \gg R_c$. Zbog toga, za merenja visoke preciznosti i tačnosti relativno malih otpornosti, ova metoda nije pogodna, jer se na ovaj način meri i otpornost kontakta (kablova) $R_x + 2R_c$. Da bi se izbegla ova sistematska greška, često je u praksi u upotrebi [merenje sa 4 kontakta](#) tj. sa Kelvinovim kontaktima (ovi kontakti ime su dobili po irskom matematičaru i inženjeru [Williamu Thomsonu, Lordu Kelvinu](#)). Lord

Kelvin je 1861. projektovao [Kelvinov most](#) za merenje otpornosti manjih od 1 Ω . Ovaj most je kasnije promenjen i projektovan za merenje sa 4 kontakta (slika 28). Ova metoda se sastoji u tome da se napon ne meri kroz iste kontakte kroz koje prolazi struja iz strujnog izvora, već postoje odvojeni kontakti. Na ovaj način, primenom Omovog zakona, otpornost kablova R_c može se zanemariti prilikom merenja nepoznate otpornosti.



Sl. 28, Merenje otpornosti ommetrom bez i sa Kelvinovim kontaktima je prikazano na levom i desnom panelu, respektivno. Sa HI (eng. *high*) i LO (eng. *low*) su označeni krajevi / terminali ommetra. Bez obzira na oznake HI i LO, za merenje otpornosti nije važan smer vezivanja otpornika u kolo. Ove oznake su standardizovane u većini multimetara koji imaju opciju za merenje otpornosti (ommetar). Sa R_x je označena nepoznata otpornost, a sa R_c je označena otpornost kontakta.

Većina portabilnih (prenosivih) digitalnih multimetara (DMM od eng. *digital multimeter*) nema mogućnost vezivanja LO (eng. *low*) i HI (eng. *high*) ulaza sa 4 kontakta za precizno merenje relativno malih otpornosti. Međutim, u većini slučajeva, DMM imaju posebnu opciju za kalibraciju. Ta opcija je označena sa NULL dugmetom, koje se u nekim uređajima naziva i "Zero" ili "Delta". NULL dugme služi za kalibraciju instrumenta (u žargonu za nulovanje, podešavanje nule instrumenta) i NULL otpornost R_{null} se računa za kratko spojene krajeve HI i LO ($R_{null} = 2R_c$). Ta vrednost se "pamti"¹² u memoriji uređaja i prilikom merenja nepoznate otpornosti, vrednost merene otpornosti R_x koja se ispisuje na ekranu je jednaka:

$$R_x = R_{mereno} - R_{null}$$

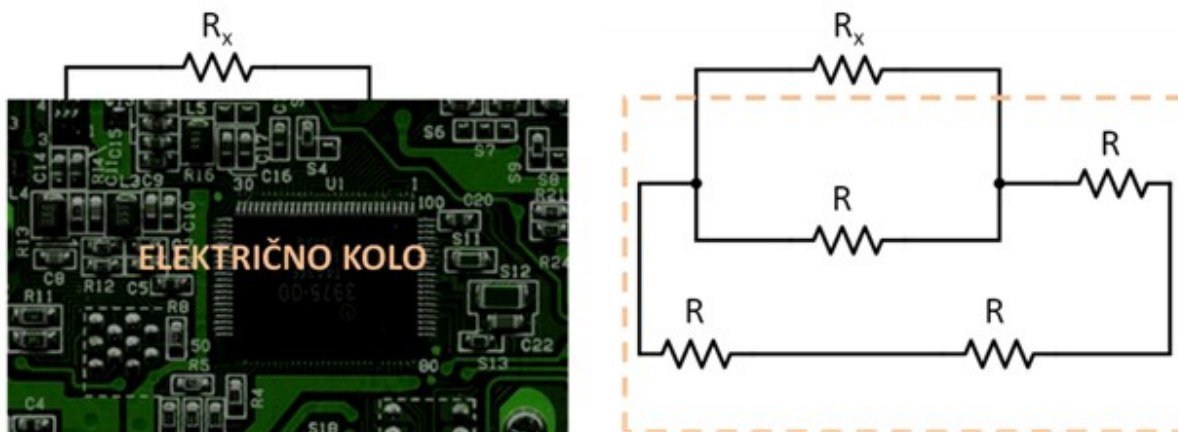
NULL dugme omogućava kalibraciju DMM-a za merenje ne samo otpornosti već i struje, induktivnosti, kapacitivnosti i napona.

¹² U većini uređaja, vrednost se memoriše dok je uređaj uključen ili dok je odabrana opcija za merenje otpornosti na DMM-u.

Jednostavno se dolazi do zaključka da je prilikom realizacije kalibracije potrebno postaviti HI i LO krajeve na sledeći način:

- za merenje struje: NULL vrednost se meri pri otvorenim krajevima HI i LO,
- za merenje induktivnosti: NULL vrednost se meri pri kratko spojenim krajevima HI i LO,
- za merenje kapacitivnosti: NULL vrednost se meri pri otvorenim krajevima HI i LO i
- za merenje napona: NULL vrednost e meri pri kratko spojenim krajevima HI i LO instrumenta.

Ako se krajevi DMM-a, koji je podešen za merenje napona, kratko spoje radi kalibracije, tada će se primetiti da (za razliku od merenja otpornosti) postoji neki relativno mali napon (reda μV) koji je različit od nule [35]. Ta pojava se naziva "kratkotrajna nestabilnost nule" i ako bi se duže posmatralo pokazivanje instrumenta moglo bi se uočiti dodatno sporije pomeranje nule tzv. *drift* instrumenta. Ovo je dokaz da se sistematska greška ne može u potpunosti ukloniti i najčešće se pretpostavlja da deo greške koji nije otklonjen ima slučajni karakter koji odgovara mernoj nesigurnosti tipa B. Za ovakvo pokazivanje voltmetra najčešće se pridružuje uniformna raspodela mernoj nesigurnosti tipa B, kako je ranije i pokazano [35]. U ovom merenju, najverovatnije poreklo *drift*-a je od šuma napajanja (50 Hz) koji se indukuje na krajevima instrumenta. Treba imati na umu da će se slična "kratkotrajna nestabilnost nule" i *drift* instrumenta desiti i prilikom kalibracije DMM-a za merenje struje.



Sl. 29, Ilustracija merenja otpornosti otpornika koji je vezan u kolo.

Otpornost otpornika se ne meri, ako je otpornik vezan u kolo. Greška koja nastane ovakvim merenjem je gruba greška, jer je rezultat nestručnosti osobe koja rukuje instrumentom. Prvi razlog, zbog koga se otpornost otpornika koji je vezan u kolo ne meri je što u kolu može postojati izvor napajanja, a ommetar meri napon kada na krajeve otpornika dovede struju, pa će rezultujući napon biti jednak proizvodu nepoznate otpornosti i zbira struja u kolu i struje koju daje ommetar. Takvo merenje bi uticalo na tačnost merene vrednosti. Drugi slučaj je kada je otpornik vezan u kolo u kome nema napajanja. U opštem

slučaju nije poznato električno kolo u kome se otpornik nalazi (eng. *black box*), pa je velika verovatnoća da će doći do greške, odnosno da merena vrednost neće biti ista kao vrednost otpornika koji se meri $R_{mereno} \neq R_x$. Na slici 29 je dat primer merenja otpornika koji je vezan u električno kolo. Obzirom da je električno kolo *black box*, postoji mogućnost da je merena vrednost jednaka $R_{mereno} = R_x || \left(\frac{3}{4}R\right)$. Generalno, ovo pravilo se primenjuje i na ostale [pasivne komponente](#). Prema tome, ne treba meriti ni kapacitivnost kondenzatora ni induktivnost kalema kada su ti elementi vezani u kolo.

Ako je ipak potrebno izmeriti vrednost pasivne komponente koja je vezana u kolo, tada se ili koristi uputstvo proizvođača za oznake komponentata (u prethodnom poglavlju je bilo objašnjeno kako se *Color Code* koristi za očitavanje vrednosti otpornika) ili se bar jedan terminal komponente razveže (u najčešćem slučaju odlemlji iz kola).

3.1.2 U / I metoda za merenje nepoznate otpornosti

Najčešće korišćene metode za merenje vrednosti pasivnih električnih veličina (otpornost, kapacitivnost i induktivnost) su U / I metode. Ove metode su zasnovane na primeni voltmetra i ampermetra za merenje napona i struje, respektivno. Različita kola koja su u upotrebi omogućavaju da se nepoznata vrednost meri indirektno i da se procenjuje na osnovu odgovarajućeg odnosa električnih veličina i relacija.

Ampermetrom se meri struja I koja prolazi kroz otpornik, a voltmetrom se meri napon U na krajevima otpornika. Primenom Omovog zakona računa se nepoznata otpornost R_x :

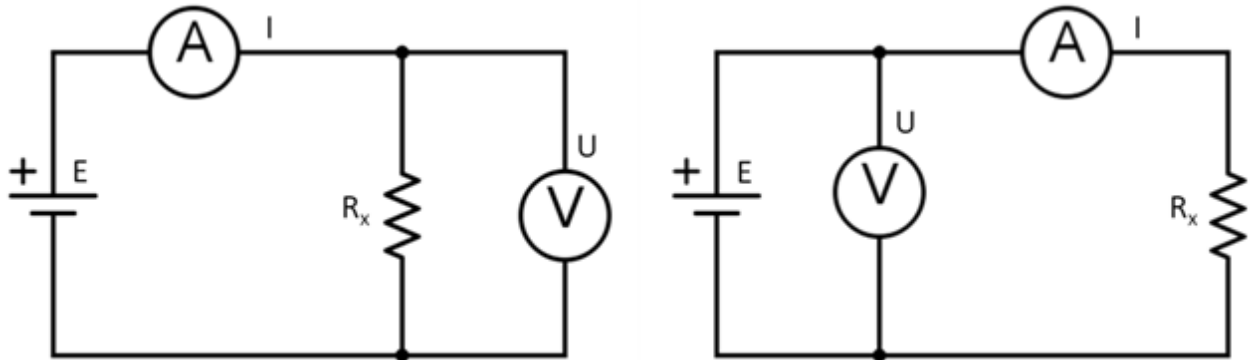
$$R_x = \frac{U}{I} \quad \text{Relacija 80}$$

Ova metoda se retko koristi u praksi i najčešće je u upotrebi u laboratorijama. Osobine ove metode su:

- potrebna su dva merna instrumenta (ampermetar i voltmetar),
- potrebno je dodatno računanje (primena Omovog zakona),
- postoji pad napona na ampermetru i pad struje na voltmetru (ampermetar i voltmetar imaju realne otpornosti koje unose "parazitne" efekte u kolo),
- jednostavna metoda – zasniva se isključivo na primeni Omovog zakona i
- može da se propusti struja koja bi prolazila kroz otpornik u radnom režimu odnosno može se meriti nepoznata otpornost dok je otpornik u radnom režimu koji odgovara potrebama elektronskog kola koje se projektuje.

Postoje dve šeme koje se koriste za merenje nepoznate otpornosti U / I metodom (slika 30): naponska veza i strujna veza. U naponskoj vezi, ampermetar se prvo vezuje redno sa izvorom napajanja, a u

strujnoj se prvo vezuje voltmeter paralelno sa izvorom napajanja kao što je prikazano na levom i desnom panelu na slici 30, respektivno.

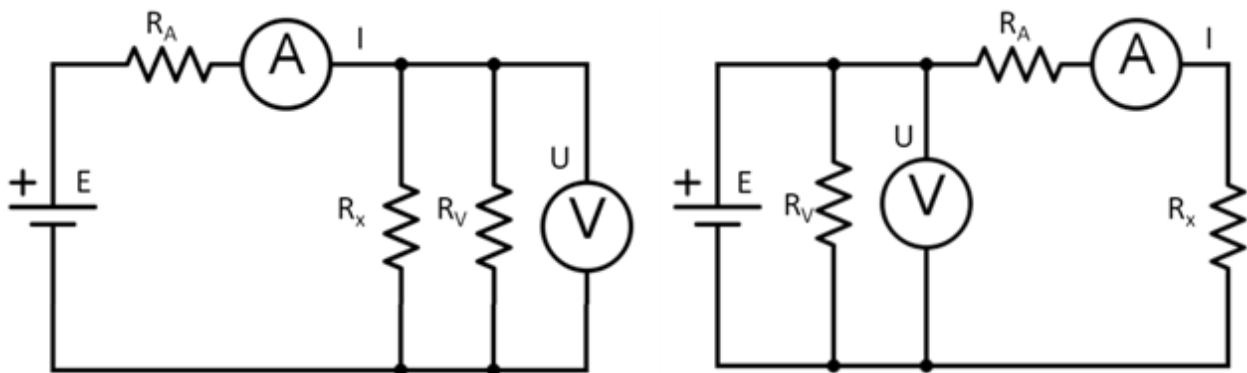


Sl. 30, Naponska veza na levom panelu i strujna veza na desnom panelu za merenje nepoznate otpornosti R_x , respektivno. Ovde treba podsetiti da se ampermetar vezuje redno, a voltmeter se vezuje paralelno u kolo.

Na slici 31 prikazane su realne šeme naponske i strujne veze u kojima unutrašnje otpornosti ampermetra R_A i voltmetra R_V se ne mogu zanemariti. Odnos merenog napona i struje primenom naponske veze je:

$$\frac{U}{I} = \frac{R_V R_x}{R_x + R_V} \quad \text{Relacija 81}$$

Omov zakon za merenje nepoznate otpornosti R_x se može koristiti, pod uslovom da je unutrašnja otpornost voltmetra mnogo veća od nepoznate otpornosti: $R_x \ll R_V$. Obično se zbog ovog ograničenja kaže da naponska veza služi za merenje "malih otpornosti", gde se misli na otpornosti koje su mnogo manje od unutrašnje otpornosti voltmetra.



Sl. 31, Realna naponska veza na levom panelu i realna strujna veza na desnom panelu sa prikazanim unutrašnjim otpornostima.

Slično, za strujnu vezu se može izvesti odnos merenog napona i struje u zavisnosti od nepoznate otpornosti i unutrašnjih otpornosti instrumenta primenom [Kirhofovih zakona](#):

$$\frac{U}{I} = R_x + R_A \quad \text{Relacija 82}$$

Iz prethodnog izraza u relaciji 82 se vidi da je merenje tačno jedino u slučaju kada je unutrašnja otpornost ampermetra mnogo manja od otpornosti otpornika koji se meri: $R_x \gg R_A$. Kaže se da se strujna veza koristi za merenje "velikih" otpornosti i ovde se misli na merenje otpornosti koje su mnogo veće od unutrašnje otpornosti ampermetra.

Može se zaključiti da odabir ampermetra tj. unutrašnje otpornosti ampermetra ne utiče na tačnost merenja prilikom korišćenja naponske veze i da odabir unutrašnje otpornosti voltmetra ne utiče na tačnost merenja prilikom korišćenja strujne veze.

U slučaju da nisu ispunjeni uslovi za primenu naponske i strujne veze, moguće je izvršiti korekciju kako ne bi došlo do sistematske greške i primeniti izraze za nepoznatu otpornost koji uključuju unutrašnje otpornosti instrumenata.

3.1.3 Merenje otpornosti metodom poređenja i metodom zamene

Otpornost je moguće izmeriti i koristeći samo jedan instrument (ampermetar ili voltmetar) uz pomoć dodatne unapred poznate etalonske otpornosti R_e kao što je prikazano na slici 32. Ove metode (metoda poređenja i metoda zamene) nisu široko rasprostranjene u praksi, ali imaju edukativni značaj u električnim merenjima. Osnovne osobine ove dve metode su [30]:

- koristi se jedan merni instrument (ili ampermetar ili voltmetar),
- potrebno je dodatno računanje kako bi se dobila tražena vrednost,
- potrebna je dodatna poznata / etalonska otpornost R_e ,
- potrebno je zadovoljiti uslov da su etalonska R_e i merena veličina R_x što "sličnije" (istog reda veličine) i
- jednostavne su metode – zasnivaju se na primeni Omovog zakona.

U rednoj vezi (levi panel na slici 32), potrebno je izmeriti napon na oba otpornika i na osnovu ta dva napona i etalonske otpornosti odrediti nepoznatu otpornost. Kako se koristi voltmetar, da bi merenje bilo tačno potrebno je zadovoljiti uslov da unutrašnja otpornost voltmetra bude mnogo veća od etalonske i nepoznate otpornosti: $R_v \gg R_e$ i $R_v \gg R_x$. U opštem slučaju potrebno je da etalonska

otpornost i nepoznata otpornost budu sličnih dimenzija $R_e \sim R_x$. Za struju I u kolu i za merene napone na otpornicima U_x i U_e važi:

$$I = U_x R_x$$

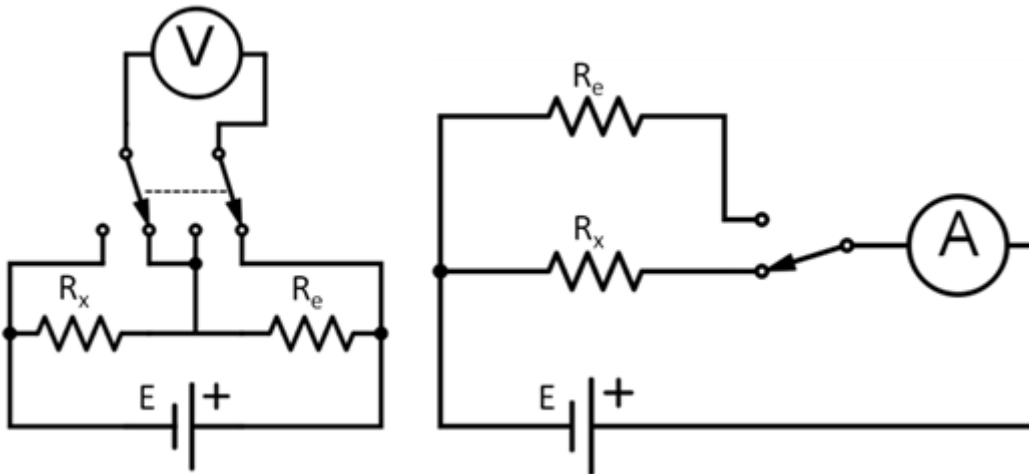
$$I = U_e R_e$$

Dalje, izraz za nepoznatu otpornost je:

$$R_x = R_e \frac{U_x}{U_e}$$

Relacija 83

Kako se u ovoj vezi poređenjem napona dva redno vezana otpornika, dobija tražena otpornost to se ova veza često naziva i metoda poređenja.



Sl. 32, Na levom panelu prikazana je redna veza (metoda poređenja) i na desnom panelu prikazana je paralelna veza (metoda zamene) za merenje nepoznate otpornosti R_x .

U paralelnoj vezi je potrebno izmeriti struju koja protiče kroz otpornike R_e i R_x u dva položaja preklopnika. Kako se za merenje struje koristi realni ampermetar, to je potrebno da nepoznata i etalonska otpornost budu mnogo veće od unutrašnje otpornosti ampermetra: $R_x \gg R_A$ i $R_e \gg R_A$. U opštem slučaju, kao i kod redne veze, potrebno je da etalonska otpornost i nepoznata otpornost budu sličnih dimenzija $R_e \sim R_x$. Na osnovu izraza za napon generatora E dobijaju se sledeće relacije:

$$E = R_x I_x$$

$$E = R_e I_e$$

Izjednačavanjem ove dve jednakosti dobija se izraz za nepoznatu otpornost R_x :

$$R_x = R_e \frac{I_e}{I_x}$$

Relacija 84

U paralelnoj vezi, kolo se uvek sastoji iz jednog otpornika (nezavisno od položaja prekidača), pa se ova metoda zove i metoda zamene, jer da bi se izmerile struje I_x i I_e potrebno je zameniti otpornike u kolu (odnosno podesiti preklopnike prekidača).

Moguće je povećati tačnost metode zamene i obezbediti da etalonski otpornik R_e bude što sličniji nepoznatoj otpornosti R_x , tako što bi se za etalonski otpornik koristila otpornička dekada. Na taj način bi se podesila vrednost etalonske otpornosti R_e da struja I_e bude što sličnija struji I_x , odnosno da oba otpornika koja se koriste budu sličnih dimenzija.

Otporničke dekade se koriste u električnim kolima kao otpornici promenljive otpornosti. Njihova otpornost se podešava po dekadama. Na primer, otpornička dekada može imati 7 dekada / mehaničkih prekidača ($\times 1 \Omega$, $\times 10 \Omega$, $\times 100 \Omega$, $\times 1 \text{ k}\Omega$, $\times 10 \text{ k}\Omega$, $\times 100 \text{ k}\Omega$, $\times 1 \text{ M}\Omega$). Rezolucija ovakve dekade je 1Ω (= minimalna vrednost / korak), a opseg $1 \Omega - 10 \text{ M}\Omega$. U laboratorijama su često u upotrebi i kondenzatorske i induktivne dekade. Otporničke dekade je relativno jednostavno realizovati sa mehaničkim prekidačima i otpornicima koji se u zavisnosti od položaja prekidača na interfejsu instrumenta dovode u rednu vezu i formiraju željenu otpornost.

3.1.4 Primer merenja otpornosti

Za merenje otpornosti, na raspolaganju je naponska veza. Unutrašnja otpornost ampermetra je 12Ω . Unutrašnja otpornost voltmetra je $100 \text{ k}\Omega$. Napajanje u kolu je $E = 10 \text{ V}$. Potrebno je izvesti izraz za otpornost R_x , ako su poznata očitavanja na voltmetru U i na ampermetru I . Potrebno je dorediti i kolika su pokazivanja instrumenata, ako se mere nepoznate otpornosti $R_{x1} = 57 \Omega$ i $R_{x2} = 133 \text{ k}\Omega$? Kolike su merene vrednosti za ova dva otpornika?

Ekvivalentna paralelna otpornost R_e otpornika koji se meri R_x i unutrašnje otpornosti voltmetra R_v je:

$$R_x || R_v = R_e$$

$$R_e = \frac{R_x R_v}{R_x + R_v}$$

Napon koji meri voltmetar, prema Omovom zakonu, moguće je izračunati na sledeći način:

$$R_e = \frac{U}{I} = \frac{R_x R_v}{R_x + R_v}$$

Rešavanjem prethodnog izraza po R_x , dobija se:

$$I R_x R_v = U R_x + U R_v$$

$$R_x = \frac{UR_v}{IR_v - U}$$

Da bi se odredila pokazivanja instrumenata potrebno je izvesti izraze za struju i napon na osnovu sledećih jednakosti:

$$E = U + IR_A$$

$$I = \frac{E - U}{R_A}$$

$$I = \frac{U}{R_x} + \frac{U}{R_v}$$

$$\frac{U}{R_x} + \frac{U}{R_v} = \frac{E - U}{R_A}$$

Dobija se da su izrazi za pokazivanje voltmetra i ampermetra:

$$U = \frac{E}{R_A \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_A} \right)}$$

$$I = \frac{E}{R_A} \left(1 - \frac{1}{R_A \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_A} \right)} \right)$$

Rešavanjem prethodnih izraza dobija se da je pokazivanje instrumenata za merenje nepoznate otpornosti $R_{x1} = 57 \Omega$ jednako $U_1 = 8.26 \text{ V}$, $I_1 = 0.14 \text{ A}$, odnosno na ovaj način merena otpornost je $R_{x1_mereno} = \frac{U_1}{I_1} = 37.57 \Omega$. Za merenje nepoznate otpornosti $R_{x2} = 133 \text{ k}\Omega$, pokazivanja instrumenata su $U_2 = 9.998 \text{ V}$ i $I_2 = 0.18 \text{ mA}$, a merene otpornost je $R_{x2_mereno} = \frac{U_2}{I_2} = 55.54 \text{ k}\Omega$. Iz rešenja ovog zadatka očigledno je da naponska veza služi za merenje relativno malih otpornosti, jer je apsolutna greška koja se dobija za merenje relativno velike otpornosti veća.

3.2 Merenje kapacitivnosti

[Kondenzator](#) je pasivni element (sa dva terminala / kraja) koji se koristi za trenutno skladištenje električne energije kada se nađe u elektiričnom polju (slika 33). Idealni kondenzator se opisuje pomoću [kapacitivnosti](#). Ovi elementi se najčešće koriste u električnim kolima za filtriranje DC komponenti signala. Imaju primenu u radio tehnici, kao rezervni izvor energije (npr. u slučaju kratkotrajnog "ispada")

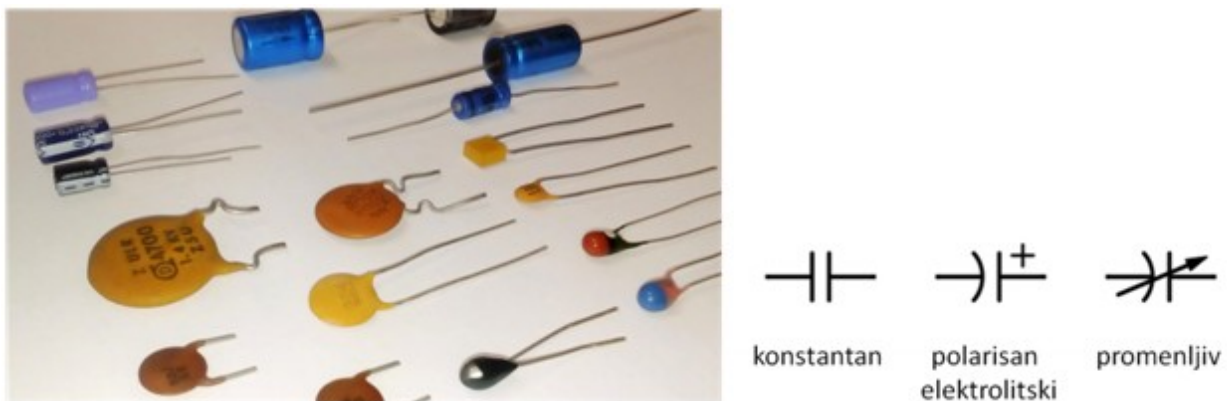
spoljašnjeg izvora) i u drugim primenama. Kondenzatori su nezamenljivi u analognoj elektronici i, između ostalog, služe za projektovanje integratora i diferencijatora.

Jednačina koja opisuje zavisnost kapacitivnosti kondenzatora C , struje kroz kondenzator $i_c(t)$ i napona na kondenzatoru $v_c(t)$ je:

$$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

Relacija 85

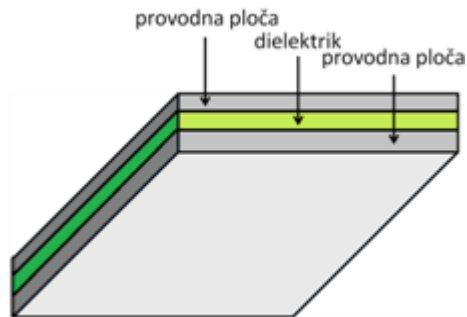
Struja kondenzatora iz relacije 85 označava da je kapacitivnost obrnuto srazmerna brzini promene napona (prvi izvod napona) na njegovim krajevima i proporcionalna struji koja prolazi kroz kondenzator.



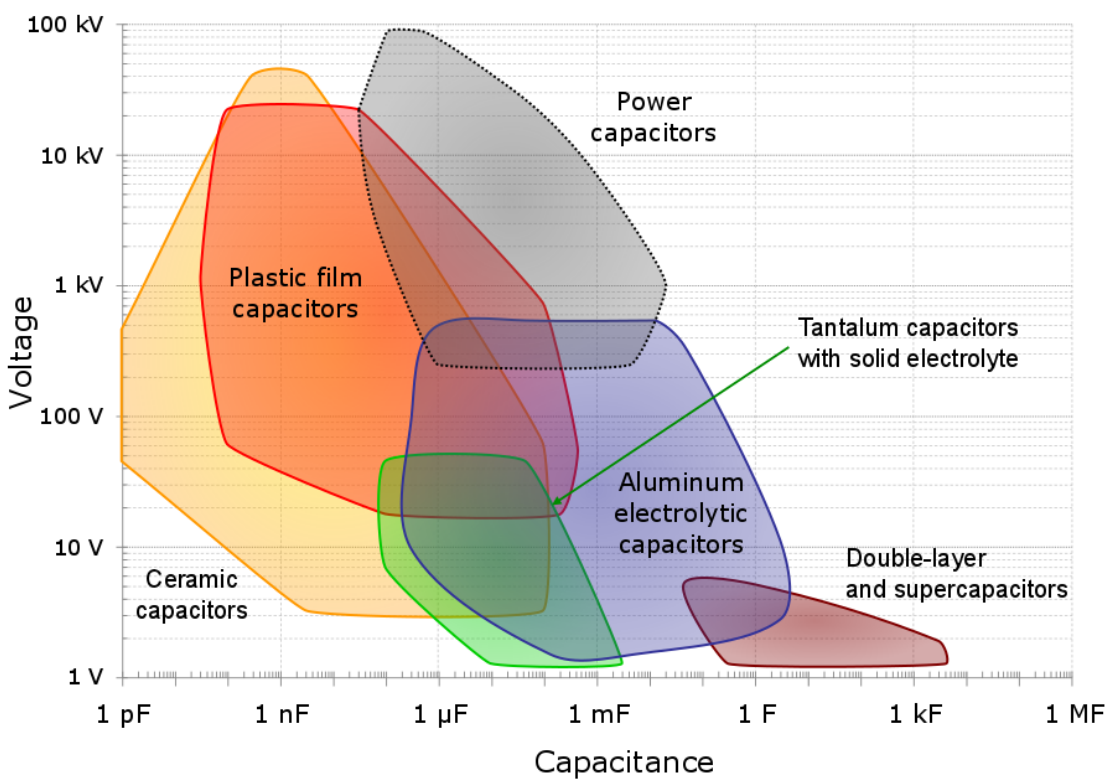
Sl. 33, Fotografija [kondenzatora](#) na levom panelu i uobičajene oznake za kondenzator konstantne kapacitivnosti, polarisan i promenljiv kondenzator su prikazane na desnom panelu.

Postoje kondenzatori koji imaju fiksnu (konstantnu) vrednost kapacitivnosti, ali i kondenzatori sa promenljivom kapacitivnošću (slika 33). U zavisnosti od materijala od kog su napravljeni, kondenzatori mogu biti tantalski, keramički, stirofor, elektrolitički i drugi. Elektrolitički kondenzatori su polarisani (jedan terminal je pozitivan, a drugi negativan) i kod njih prilikom vezivanja kondenzatora u kolo treba voditi računa o smeru struje kroz kondenzator. Kod ovih kondenzatora jedna elektroda je tečna (elektrolit), pa je kondenzator polarisan u jednu stranu. Ako se okrene polaritet elektrolitičkog kondenzatora, prilikom vezivanja u kolo, može doći do eksplozije. Uobičajeno, kod elektrolitičkih kondenzatora, je negativni kraj označen sa “-” i taj terminal je kod nekih kondenzatora kraći od pozitivnog terminala.

Na slici 33 prikazana je fotografija kondenzatora sa uobičajenim oznakama koje se koriste za kondenzatore u elektronskim kolima. Većina kondenzatora napravljena je tako da odgovara modelu sa dve provodne ploče i dielektrikom koji se nalazi između provodnih ploča. Model kondenzatora sa dve provodne ploče i dielektrikom prikazan je na slici 34.



Sl. 34, Model kondenzatora sa sve provodne ploče i dielektrikom između ploča.



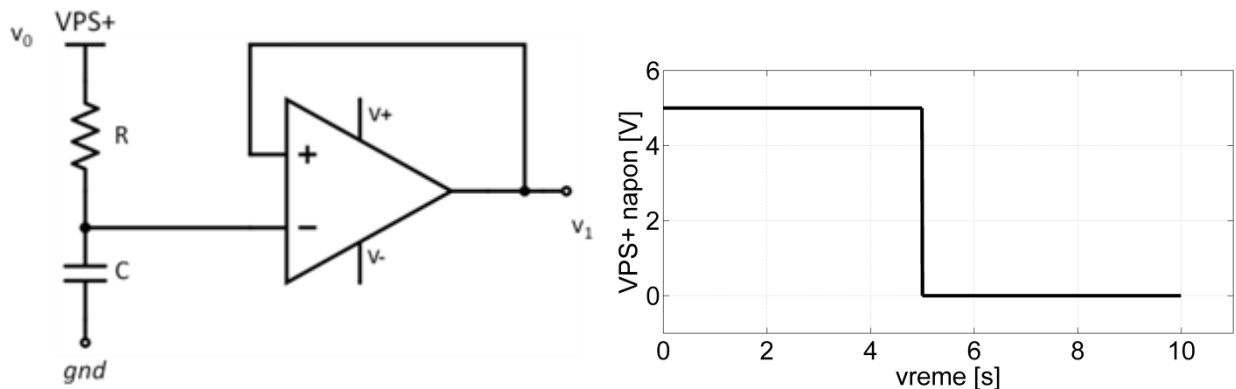
Sl. 35, Tipovi kondenzatora koji odgovaraju različitim kapacitivnostima i probojnim naponima (By Elcap - Own work, CC0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=20463873>).

Praktično, kondenzatori mogu da sadrže veliki broj provodnih ploča i dielektrika (izolatora). Prilikom odabira kondenzatora, treba voditi računa o kapacitivnosti, ali i o probojnom naponu. Različitim tipovima kondenzatora (koji su napravljeni od različitih materijala) odgovaraju različite vrednosti probojnih napona i kapacitivnosti (slika 35).

Kapacitivnost se može meriti 1) digitalnim multimetrom, 2) [LCR](#) metrom ili 3) mernim mostovima o kojima će u kasnijim poglavljima biti više reči. Jedna od metoda merenja kapacitivnosti kondenzatora, zasniva se na snimanju / merenju karakteristike kondenzatora, tj. merenju napona na kondenzatoru prilikom "punjenja" i "pražnjenja" kondenzatora [30]. Primer jednog takvog merenja dat je u nastavku ovog poglavlja.

3.2.1 Primer merenja kapacitivnosti

Idealan kondenzator ima osobinu skladištenja i otpuštanja energije bez gubitaka za razliku od realnog kondenzatora. Na osnovu dijagrama promene napona na kondenzatoru, usled prisustva spoljnog jednosmernog napona na krajevima kondenzatora, moguće je snimiti karakteristiku "punjenja", a potom prilikom isključenja spoljnog izvora i karakteristiku "pražnjenja" realnog kondenzatora. Naime, prilikom dovođenja spoljnog izvora napajanja, potrebno je neko vreme da se kondenzator "napuni" i prilikom isključenja spoljnog izvora napajanja, potrebno je neko vreme da se kondenzator "isprazni". Ovo se ne dešava trenutno kao kod idealnog kondenzatora. Kod realnog kondenzatora vreme koje je potrebno da se kondenzator napuni je određeno kapacitivnošću kondenzatora.



Sl. 36. Kolo za merenje napona na kondenzatoru prilikom primene jednosmernog VPS (eng. *variable power supply*) na levom panelu i vremenska zavisnost VPS napona na desnom panelu.

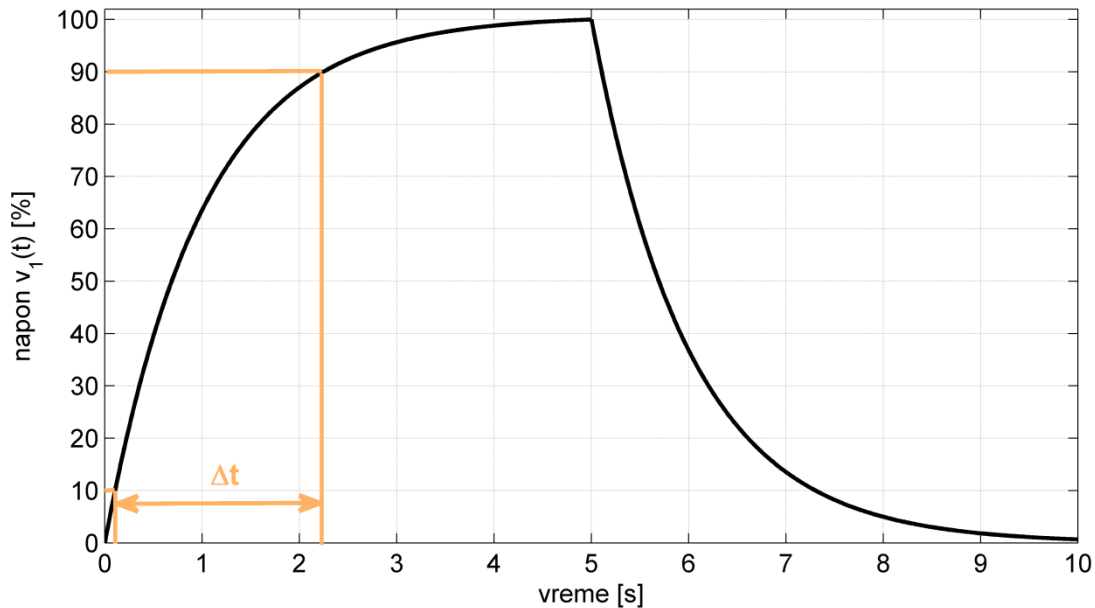
Kapacitivnost kondenzatora je moguće izmeriti priloženom šemom sa slike 36 koristeći izvor jednosmernog napona. VPS (od eng. *variable power supply*) u šemi sa slike 36 (levi panel) označava napon koji se dovodi na krajeve kondenzatora i ima oblik kao na slici 36 (desni panel). Za $v_0 = 5$ V (5 sekundi), kondenzator se puni, a za $v_0 = 0$ V kondenzator se prazni. Operacioni pojačavač koji je prikazan u ovom kolu služi kao bafer i koristi se za prilagođenje impedanse (više o tome u sledećim poglavljima).

Za kolo sa slike 36, važi sledeća relacija:

$$C \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R} = 0 \quad \text{Relacija 86}$$

Rešavanjem diferencijalne jednačine date relacijom 86 po $v_1(t)$, dobija se izraz za napon na kondenzatoru:

$$v_1(t) = v_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{Relacija 87}$$



Sl. 37, Napon na kondenzatoru koji prikazuje punjenje i pražnjenje kondenzatora za dovođenje jednosmernog napona na krajeve kondenzatora. Na slici su iznačeni vremenski trenuci t_{10} i t_{90} za koje napon na kondenzatoru poraste za 10% i 90% od napona napajanja.

Vremenska zavisnost izlaznog napona kondenzatora (v_1) za promenu napona na ulazu (v_0) je prikazana na slici 37. Sa τ se definiše vreme koje je potrebno da se “napuni” kondenzator preko otpornika do oko 63.2% od vrednosti ulaznog napona. Sa τ je određena vremenska konstanta kondenzatora, često se naziva i RC konstanta jer je:

$$\tau = RC \quad \text{Relacija 88}$$

Kriva punjenja i pražnjenja kondenzatora (slika 37) može se analitički predstaviti kao:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), & 0 < t < 5 \text{ s} \\ v_1 &= v_0 e^{-\frac{t-T}{\tau}} & 5 \leq t < 10 \text{ s}, T = 5 \text{ s} \\ v_1 &= 0 & t > 10 \text{ s} \end{aligned}$$

Za punjenje kondenzatora, važi sledeća relacija:

$$v_1 = v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Jednostavnim matematičkim transformacijama, može se doći do izraza za kapacitivnost kondenzatora u zavisnosti od otpornika R i do izraza za vreme Δt koje je potrebno da se kondenzator napuni od 10% do 90% od napona napajanja u kolu (levi panel na slici 36):

$$\frac{v_1}{v_0} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{v_1}{v_0}$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{v_1}{v_0}\right)$$

$$t = -\tau \ln\left(1 - \frac{v_1}{v_0}\right)$$

$$t = \tau \ln\left(\frac{v_0}{v_0 - v_1}\right)$$

$$\Delta t = t_{90} - t_{10}$$

$$\Delta t = \tau \ln\left(\frac{v_0}{v_0 - 0.9v_0}\right) - \tau \ln\left(\frac{v_0}{v_0 - 0.1v_0}\right)$$

$$\Delta t = \tau \left(\ln 10 - \ln \frac{10}{9}\right)$$

$$\Delta t = \tau \ln 9$$

$$\Delta t = R C \ln 9$$

Konačno, dobija se sledeći izraz za kapacitivnost kondenzatora na osnovu napona na kondenzatoru sa slike 37:

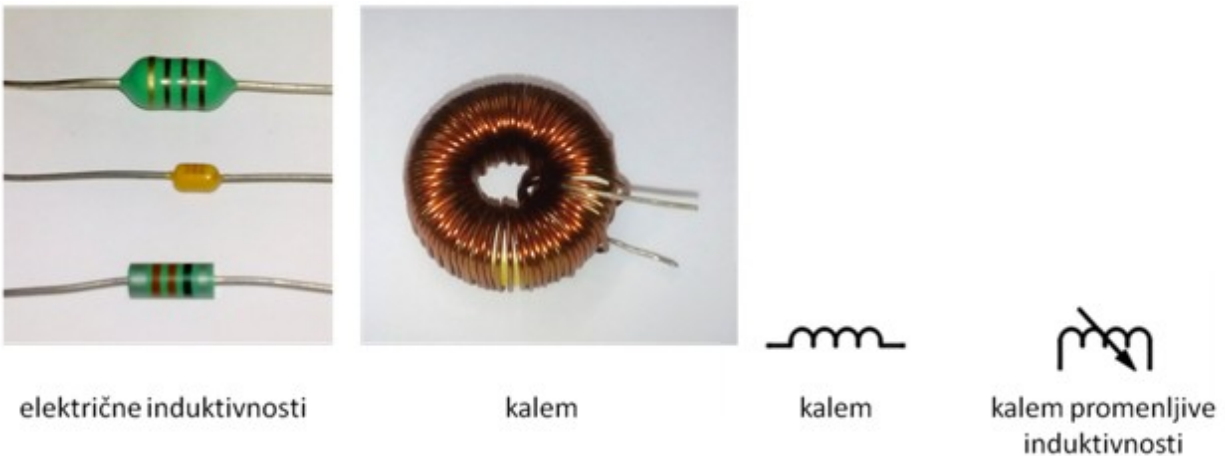
$$C = \frac{\Delta t}{R \ln 9}$$

Relacija 89

Ova metoda se može realizovati i automatski, kada se u elektronskom kolu doda astabilni tajmer (npr. klasični [555 integrisani čip](#)) koje može da proizvodi povorku četvrtki DC napona. Ove četvrtke omogućavaju da se tokom logičke "1" kondenzator puni, a tokom logičke "0" kondenzator se prazni.

3.3 Merenje induktivnosti

[Kalem](#) ili zavojnica (slika 38) je pasivni element (sa dva terminala / kraja) koji se koristi za prenos električne energije u magnetnom polju i za skladištenje energije u formi magnetnog polja (u konvertorima energije). Idealan kalem ima dominantnu osobinu [induktivnosti](#).



Sl. 38, Na levom panelu prikazane su fotografije električnih induktivnosti i [kalema](#), a na desnom panelu prikazane su oznake kalema koje se koristi u električnim kolima: za kalem konstantne induktivnosti i za kalem promenljive induktivnosti.

Obično se koriste za filtriranje u elektronskim kolima (moguće je projektovati filter niskopropusnik koji vrši prigušenje visokih frekvencija). Kalem se sastoji od provodnika tj. žice koja je namotana oko jezgra. Za konstrukciju jezgra najčešće se koriste feromagnetni materijali. Izraz koji određuje zavisnost napona na kalemu $v_L(t)$ od induktivnosti L i struje kalema $i_L(t)$ je:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad \text{Relacija 90}$$

Iz prethodnog izraza (relacija 90) se vidi da je induktivnost kalema obrnuto srazmerna brzini promene struje u vremenu (prvi izvod struje) i da je proporcionalna naponu na kalem.

Za merenje induktivnosti, mogu se koristiti (slično kao i za merenje kapacitivnosti): 1) digitalni multimetri, 2) LCR metri ili 3) merni mostovi (pogledati sledeća poglavlja) [30].

Kada se govori o merenju otpornosti, kapacitivnosti i induktivnosti, treba imati na umu da su te osobine karakteristične za idealne, a ne za realne elemente. Svaki realan element ima osobine otpornosti, kapacitivnosti i induktivnosti, pa je praktičnije razmatrati merenje takvih elemenata odnosno razmatrati metode merenja [električne impedanse](#).

3.4 Merenje impedanse

Impedansa se izražava preko realnog R i imaginarnog X dela:

$$Z = R + jX$$

Relacija 91

Imaginarni deo se najčešće naziva reaktansa i može biti induktivna ili kapacitivna. U opštem slučaju, reaktansa može biti istovremeno i induktivna i kapacitivna. Nijedna realna komponenta nije "čisto" rezistivna, kapacitivna ili induktivna. Faktor dobrote Q (eng. *quality*) i faktor gubitaka D (eng. *dissipation*) služe da se opiše "čistoća" neke realne komponente.

U opštem slučaju provodnika, realni deo impedanse R zavisi od osobine materijala, a imaginarni deo impedanse X zavisi od geometrije provodnika. U slučaju da je konduktansa (imaginarni deo impedanse) "čisto" induktivna, veži sledeća relacija:

$$X_L = 2\pi fL$$

$$X_L = \omega L$$

Relacija 92

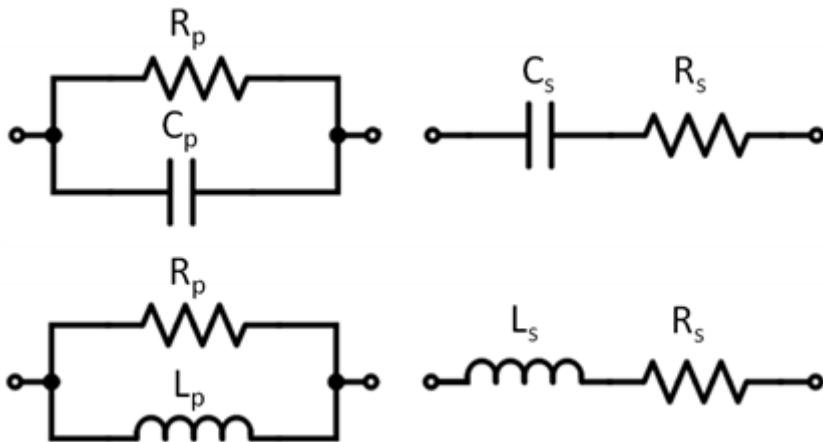
U slučaju da je konduktansa "čisto" kapacitivna, važi sledeća relacija:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Relacija 93

U prethodnim relacijama 92-93 sa f je označena učestanost, a sa ω kružna učestanost.



Sl. 39, Paralelna veza kondenzatora i otpornika i redna veza kondenzatora i otpornika (paralelni i redni model impedanse koja sadrži otporne i kapacitivne osobine) prikazani su na gornjem panelu. Paralelna veza kalema i otpornika i redna veza kalema i otpornika (paralelni i redni model impedanse koja sadrži otporne i induktivne osobine) prikazani su na donjem panelu.

Faktor gubitaka kondenzatora D (eng. *dissipation*) se definiše kao odnos reaktanse i otpornosti. Tipične vrednosti za faktor gubitaka su u opsegu od 10^{-4} do 0.1. Impedansa se može modelirati i električnim kolom u koje su uključeni kondenzator i otpornik. Postoji dva načina da se prikaže takva impedansa: paralelna i redna (eng. *serial*) veza elemenata. Redna i paralelna veza otpornika i kondenzatora i redna i paralelna veza otpornika i kalema date su na slici 39.

Za paralelnu vezu otpornika i kondenzatora, faktor gubitaka D je:

$$D = \frac{X_p}{R_p} \quad \text{Relacija 94}$$

$$D = \frac{1}{\omega C_p R_p} \quad \text{Relacija 95}$$

Za rednu vezu otpornika i kondenzatora:

$$D = \frac{R_s}{X_s} \quad \text{Relacija 96}$$

$$D = \omega C_s R_s \quad \text{Relacija 97}$$

Faktor dobrote kalema Q (eng. *quality factor*) se definiše kao odnos reaktanse i otpornosti. Tipične vrednosti faktora dobrote se kreću u opsegu od 5 do 1000 [19]. Relacija za faktor dobrote u opštem slučaju je:

$$Q = \frac{1}{D} \quad \text{Relacija 98}$$

$$Q = \frac{X_L}{R} \quad \text{Relacija 99}$$

$$Q = \frac{-X_C}{R} \quad \text{Relacija 100}$$

Iz relacija 94-100 se vidi da su faktor dobrote i faktor gubitaka obrnuto srazmerni. Za paralelnu vezu kalema i otpornosti, faktor dobrote je:

$$Q = \frac{R_p}{X_p} \quad \text{Relacija 101}$$

$$Q = \frac{R_p}{\omega L_p} \quad \text{Relacija 102}$$

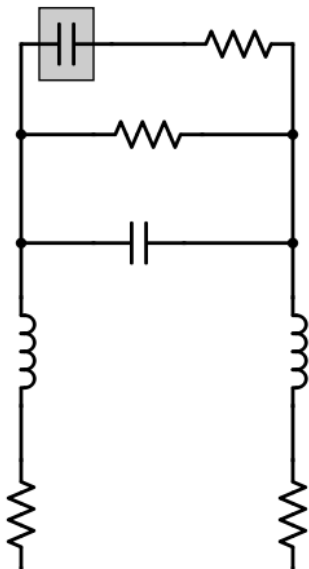
Za rednu vezu kalema i otpornosti, faktor dobrote je:

$$Q = \frac{X_s}{R_s} \quad \text{Relacija 103}$$

$$Q = \frac{\omega L_s}{R_s} \quad \text{Relacija 104}$$

Kao što je već rečeno: svaka realna komponenta ima kombinaciju tri svojstva (otpornost, kapacitivnost i induktivnost), odnosno neke parazitne elemente. Obzirom da kapacitivnost i induktivnost zavise od

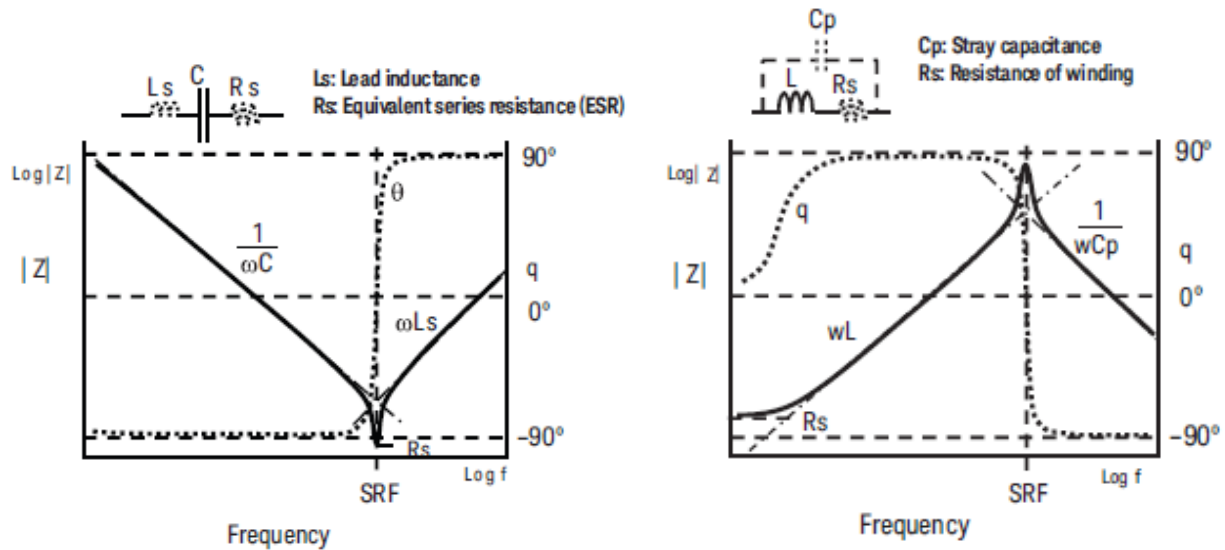
promene napona i struje u vremenu, respektivno, to je i impedansa frekvencijski zavisna. Odnosno, impedansa zavisi od brzine promene napona / struje. Za svaku realnu komponentu postoji neko ekvivalentno kompleksno kolo (model kola sa koncentrisanim parametrima). Na slici 40 je prikazano ekvivalentno kolo kondenzatora [19].



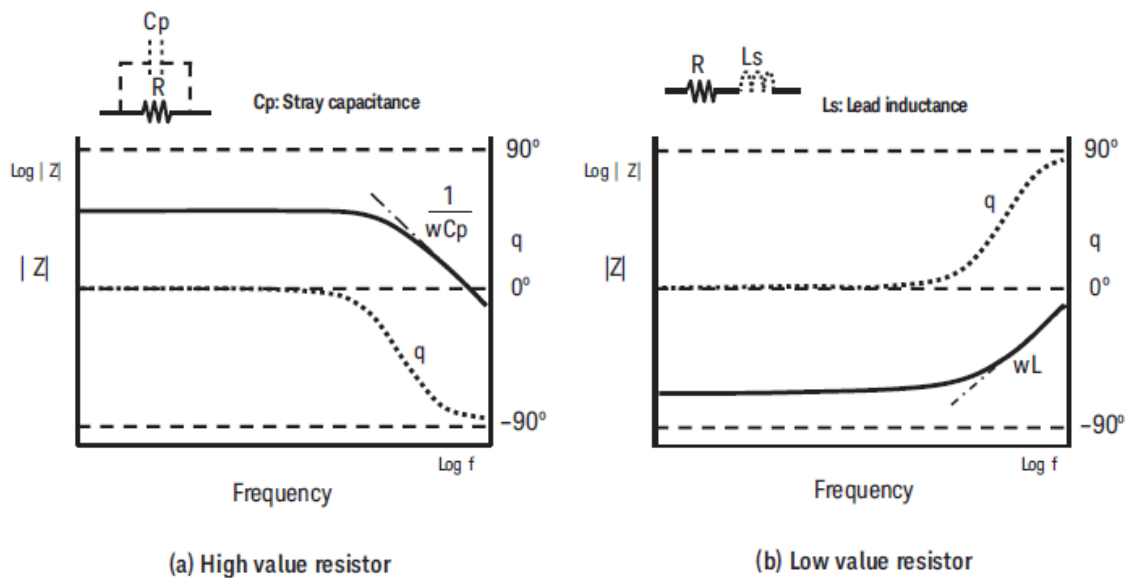
Sl. 40, Ekvivalentno kolo realnog kondenzatora koji je uokviren i osenčen na šemi.

Poznato je da realne komponente u zavisnosti od primenjene frekvencije mogu promeniti svoja svojstva. Za svaku realnu komponentu, postoji rezonantna frekvencija (SRF eng. *self-resonant frequency*) za koju su kapacitivna i induktivna reaktansa jednake [19]. Za vrednosti frekvencija koje su veće od SRF, komponente menjaju svoja svojstva, odnosno realni element koji je dominantno kapacitivan (kondenzator) postaje dominantno induktivan (kalem) i obrnuto, kao što je prikazano na slici 41.

Za frekvencije veće od SRF realni otpornik relativno velike otpornosti ponaša se kao kondenzator (C_p – parazitna kapacitivnost). S druge strane, za frekvencije veće od SRF, realni otpornik relativno male otpornosti, ponaša se kao kalem (L_p – parazitna induktivnost). Karakteristika realnog otpornika relativno male i relativno velike otpornosti u zavisnosti od frekvencije je prikazana na slici 42.



Sl. 41, Zavisnost osobina realnog kondenzatora i realnog kalema od frekvencije. Na apscisi je označena SRF (eng. *self-resonant frequency*), za koju dolazi do promene impedanse. Odgovarajuće oznake su eng. *stray* - lutajući i eng. *winding* - namotaj. Slike su preuzete iz [19] uz dozvolu © Keysight Technologies, Inc. (Reproduced with Permission, Courtesy of Keysight Technologies © Keysight Technologies, Inc.).

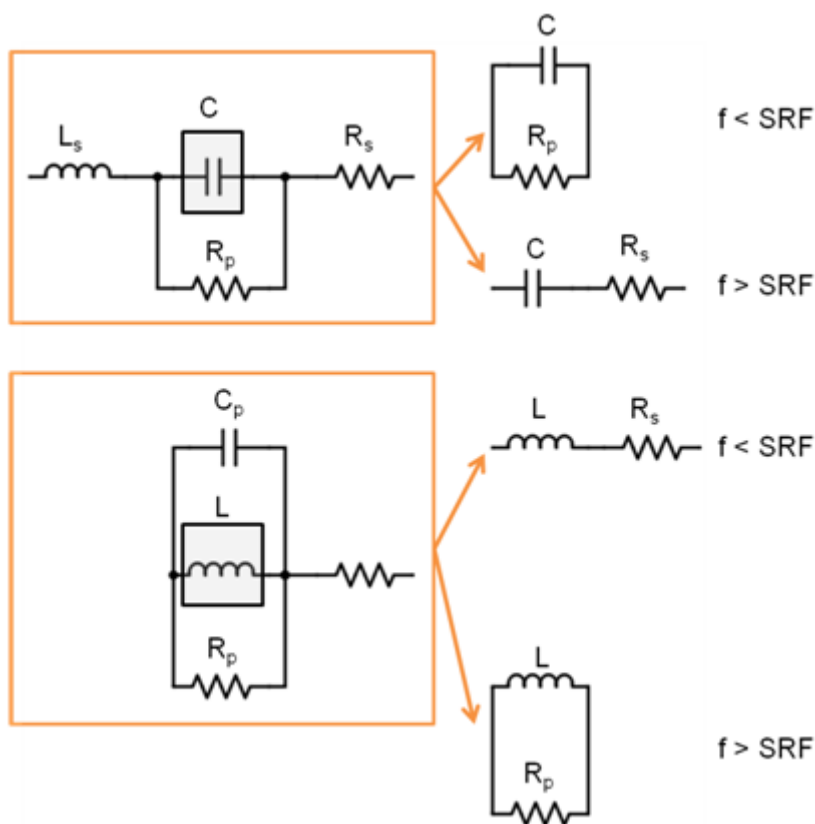


Sl. 42, Zavisnost osobina realnog otpornika relativno velike otpornosti (levi panel) i osobina realnog otpornika relativno male otpornosti (desni panel) od frekvencije. Slika je preuzeta iz [19] uz dozvolu © Keysight Technologies, Inc. (Reproduced with Permission, Courtesy of Keysight Technologies © Keysight Technologies, Inc.).

Merenje impedanse, osim od frekvencije, može zavisiti i od drugih faktora kao što su [14]:

1. amplituda test signala (na primer, za keramičke kondenzatore postoji promena kapacitivnosti u zavisnosti od primenjenog test signala i konstante dielektrika koja zavisi od materijala od koga je kondenzator napravljen),
2. DC komponenta primenjenog napona,
3. temperatura,
4. vlažnost,
5. magnetno polje i
6. starenje materijala.

Kako je dominantan faktor koji utiče na promenu osobina realnih pasivnih komponenti frekvencija, to se u zavisnosti od primenjene frekvencije, pasivna komponenta modelira se odgovarajućim električnim kolom. Primer modela realnog kondenzatora i realnog kalema je prikazan na slici 43 za odgovarajući opseg frekvencija u odnosu na rezonantnu frekvenciju ($f < \text{SRF}$ i $f > \text{SRF}$).



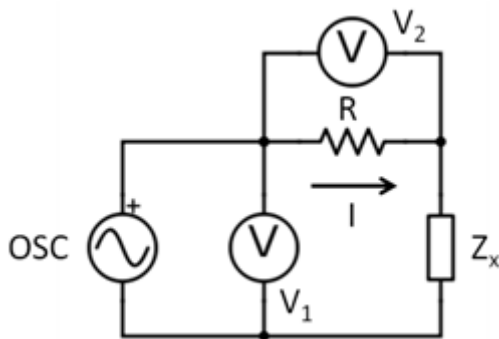
Sl. 43. Ekvivalentna kola realnog kondenzatora (levi panel) i realnog kondenzatora (desni panel). Oznaka R_p označava paralelnu otpornost, R_s rednu otpornost (eng. *series*), C_p paralelnu kapacitivnost, L_s rednu induktivnost i SRF je *self-resonant frequency*.

U praksi su u upotrebi jednostavni modeli ekvivalentnih paralelnih ili serijskih veza. Za merenje impedanse, uobičajeno se koristi LCR metar, pa je veoma važno prilikom korišćenja LCR metra odabrati odgovarajući model (serijska ili paralelna veza).

Ako se impedansa meri LCR metrom, koristi se serijska veza u slučaju kada se radi o relativno malim otpornostima $R_s = 1 \text{ k}\Omega$, a paralelna veza ako se radi o relativno velikim otpornostima $R_p = 100 \text{ k}\Omega$ i odabir modela između ove dve vrednosti otpornika ne utiče na tačnost merenja tj. mogu se koristiti i serijski i paralelni model. Preporuka je [19] da se za relativno male vrednosti impedanse ($< 1 \text{ k}\Omega$) koristi serijska, za relativno velike vrednosti impedanse ($> 100 \text{ k}\Omega$) da se koristi paralelna veza i da za vrednosti koje su između $1 \text{ k}\Omega$ i $100 \text{ k}\Omega$ je moguće koristiti i serijsku i paralelnu vezu.

3.4.1 U / I metoda za merenje impedanse

U ranijem poglavlju opisano je kako se U / I metoda može koristiti za merenje nepoznate otpornosti. Treba imati na umu da se ova metoda može koristiti i za merenje kapacitivnosti i induktivnosti, u opštem slučaju za merenje impedanse. Generalizovani model kolo za merenje nepoznate impedanse primenom U / I metode je prikazan na slici 44.



Sl. 44, Opšta šema U / I metode za merenje impedanse.

Nepoznatu impedansu Z_x je moguće odrediti merenjem napona V_1 i V_2 .

$$Z_x = \frac{V_1}{I} = \frac{V_1}{V_2} R$$

Relacija 105

Vrednost struje I se određuje pomoću izmerene vrednosti V_2 i otpornika poznate otpornosti R . Postoje i druge metode koje se zasnivaju na merenju struje i napona i koje se koriste za merenje velikih i malih

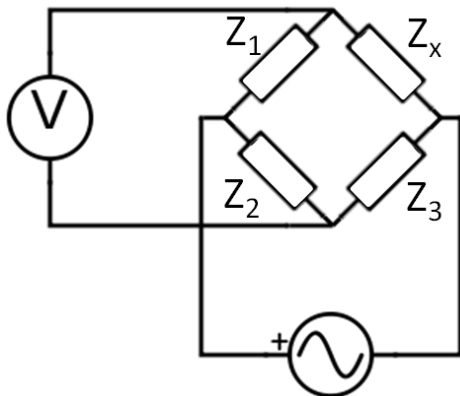
vrednosti nepoznate impedanse Z_x i o njima je bilo više reči u prethodnim poglavljima (npr. merenje otpornosti strujnom i naponskom vezom).

3.5 Merni mostovi za merenje električnih veličina

Merni mostovi su kola koja se uobičajeno koriste za merenje vrednosti pasivnih komponenti. Mogu se koristiti za merenje impedanse u elektronskim kolima koja se napajaju sa AC (eng. *alternating current*) izvorom, za merenje otpornosti, induktivnosti, kapacitivnosti i faktora gubitaka.

Mostovi mogu biti frekvencijski zavisni i frekvencijski nezavisni. Mogu se koristiti i u kombinaciji sa drugim kolima za kondicioniranje (pogledati sledeća poglavlja), kao što su filtri i pojačavači.

Osnovni princip po kome mostovi funkcionišu je princip uspostavljanja ravnoteže (detekcija nule). Merenje se vrši na osnovu relacija koje važe za odgovarajući most i elemente koji su u njega povezani, nakon što se uspostavi ravnoteža mosta. Ravnoteža mosta se proverava nekim od indikatora / detektora (na primer osciloskop, DMM).



Sl. 45, Opšta šema naizmeničnog mernog mosta za merenje nepoznate impedanse Z_x . U ovoj šemi detektor ravnoteže je voltmetar.

Princip rada mernog mosta, u opštem slučaju, je sledeći: Kada ne postoji protok struje kroz detektor odnosno voltmetar na slici 45, onda se može odrediti vrednost nepoznate impedanse Z_x preko poznatih vrednosti ostalih impedansi u kolu:

$$Z_x = \frac{Z_1}{Z_2} Z_3$$

Relacija 106

4 INSTRUMENTI ZA MERENJE ELEKTRIČNIH VELIČINA

Bilo da se u praksi koriste digitalni instrumenti koji imaju odgovarajući korisnički interfejs (najjednostavniji u obliku numeričkog displeja) sa kojim se mogu očitati odgovarajuće brojne vrednosti merene veličine ili analogni instrumenti koji se zasnivaju na elektro-mehaničkom principu i na kojima je kazaljka usmerena ka merenoj vrednosti na skali, svi instrumenti se zasnivaju na istim fizičkim principima [7]. S toga je veoma važno, posebno sa stanovišta obrazovanja, razumevanje osnovnih fizičkih principa na kojima su zasnovani merni instrumenti.

4.1 Princip rada osnovnih mernih instrumenata

Idealan ampermetar ima unutrašnju otpornost 0, a idealan voltmetar ima unutrašnju otpornost koja je beskonačna. Međutim, ovo nisu svojstva realnih instrumenata. Zato se moraju zadovoljiti određena praktična ograničenja, odnosno potrebno je da unutrašnja otpornost ampermetra bude što je moguće manja, a voltmetra što je moguće veća. Kako se voltmetar vezuje paralelno u kolo, a ampermetar redno, to se jednostavno dolazi do zaključka kakvi su aproksimativni modeli ova dva instrumenta u električnim kolima:

1. voltmetar se aproksimira otvorenom vezom (element beskonačne ili što veće otpornosti) i
2. ampermetar se aproksimira kratkim spojem (element nulte ili što manje otpornosti).

Zahvaljujući svojoj konstrukciji, ampermetri i voltmetri (koji se najčešće koriste kao elementi DMM-a) imaju mogućnost prikaza merene struje i napona numerički na ekranu instrumenta ili na displeju sa kazaljkom i graduisanom skalom. U ovom poglavlju biće predstavljeni osnovni fizički i električni principi koji se koriste za konstrukciju ovih uređaja.

Princip rada analognih instrumenata može se zasnivati na elektro-mehaničkim ili elektronskim principima. Prednosti elektro-mehaničkih instrumenata su što ampermetri i voltmetri ne zahtevaju dodatan izvor napajanja, pa u nekim primenama klasičan indikator na analognom instrumentu sa kazaljkom može biti prednost. Mane ovakvih instrumenata su što su njihove karakteristike relativno lošije u pogledu tačnosti (klase tačnosti) i ulazne otpornosti u poređenju sa digitalnim instrumentima. Merenje sa ovim instrumentima ne može da se automatizuje. Postoji više realizacija elektro-mehaničkih instrumenata [29]:

1. sa pokretnim kalemom,
2. sa pokretnim gvožđem,
3. sa pokretnim magnetom,
4. sa unakrsnim kalemima,
5. elektrodinamički,

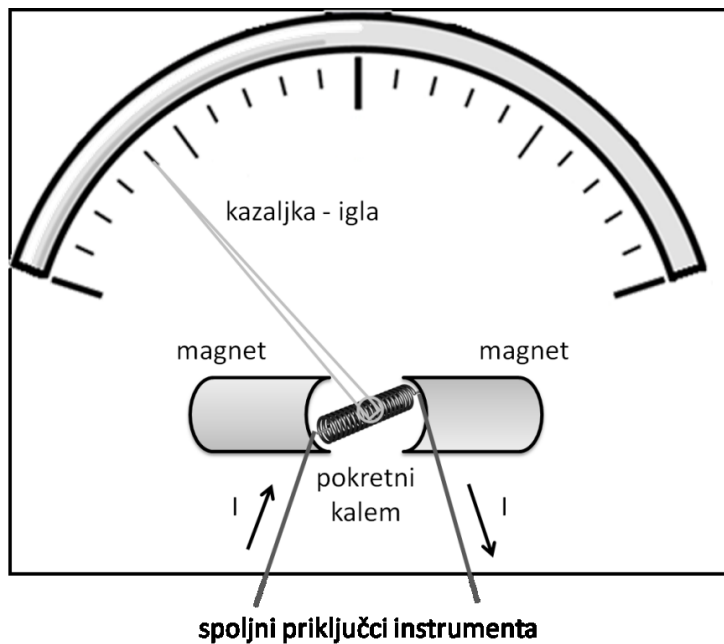
6. elektrostatički i
7. termoelektrični.

U ovom udžbeniku biće prikazani i objašnjeni principi rada instrumenata sa pokretnim kalemom i instrumenata sa pokretnim gvožđem, kako su to najčešće korišćeni principi za projektovanje instrumenata u električnim merenjima.

4.1.1 Instrument sa pokretnim kalemom

Ako se na krajeve metalne žice dovede struja, u tom slučaju će se stvoriti neko magnetsko polje u okolini provodnika (metalne žice) kroz koji teče struja. Indukovano magnetno polje jednostavno se može detektovati ako se u okolini žice kroz koju teče struja postavi kompas. Usled dejstva magnetnog polja igla kompasu će skretati [24]. Na ovom principu moguće je meriti struju kroz provodnik. Prilikom projektovanja ovih instrumenata se ne koristi metalni provodnik, već kalem koji omogućava indukovanje magnetnog polja veće magnetne indukcije u odnosu na magnetno polje indukovano metalnom žicom.

Instrumenti koji su projektovani za rad na ovom principu, nazivaju se instrumenti sa pokretnim kalemom. Najčešće se projektuju pomoću bakarne žice koja je obmotana oko jezgra od gvožđa i postavljena između polova magneta kao što je prikazano na slici 46.



Sl. 46. Prikazana je pojednostavljena šema ampermetra sa pokretnim kalemom sa označenim osnovnim elementima i strujom I koju meri ampermetar.

Kalem je povezan za oba kraja magneta i za njega je zakačena kazaljka (slika 46). Kada se na krajeve ovog instrumenta dovede struja, onda ta struja protiče kroz bakarnu žicu (kalem) i indukuje se magnetno polje u kalemu. Ovo novonastalo polje se odbija od već postojećeg magnetnog polja i dovodi do toga da kalem rotira i kazaljka se pomera. Kako se struja koja prolazi kroz kalem povećava, to i indukovano magnetno polje postaje veće, pa kazaljka ima veći otklon. Na taj način je pomeraj kazaljke srazmeran struji koja protiče kroz ovakav instrument. Sa odgovarajućom kalibracijom instrumenta, koja služi za definisanje brojne vrednosti struje kroz instrument, moguće je meriti DC struju. Kazaljka se u ovom slučaju ponaša kao puluga, odnosno mali otklon kazaljke će imati veći otklon vrha kazaljke na skali. Ovaj sistem poluge omogućava preciznija merenja primenom instrumenta sa pokretnim kalemom.

Ukratko, rad ovih instrumenata zasniva se na elektromagnetnim principima: električna struja koja protiče kroz provodnik indukuje u njegovoj okolini magnetno polje koje je normalno na pravac kretanja elektrona u provodniku. Jačina električne struje i jačina magnetnog polja su srazmerni tj. što je veća struja koja protiče kroz magnetni provodnik to je veća jačina magnetnog polja koje se stvara u okolini provodnika i obrnuto. Ako ovako indukovano magnetno polje dođe u dodir sa drugim magnetnim poljem, generiše se sila. Dalje, ako postoji mogućnost da se jedan od izvora tog magnetnog polja slobodno kreće u odnosu na drugi izvor magnetnog polja, onda sila izaziva kretanje koje je proporcionalno jačini električne struje [7]. U slučaju instrumenta sa pokretnim kalemom, izvor magnetnog polja koji se kreće je kalem kao što je prikazano na slici 46.

Istorijski gledano, prvi instrumenti koji se se zasnivali na principu pokretnog kalema su bili poznati pod nazivom [galvanometri](#). Ovi instrumenti su bili veoma osetljivi na spoljno kretanje (dejstvo drugih spoljnih sila), ali i na magnetna polja koja se mogu naći u okruženju i koja mogu uticati na kretanje kazaljke. Danas su ovi instrumenti zadržali isti princip, ali uz neka dodatna poboljšanja: provodnik se projektuje u obliku namotaja (kalema) koji je [šildovan](#) (zaštićen) od spoljnih uticaja. Ovo elektromagnetno šildovanje služi sa magnetnu i električnu izolaciju od spoljašnjih uticaja.

Većina instrumenata koji su ovako projektovani je osetljiva na polaritet (smer protoka struje kroz instrument), pa može da meri struju samo u jednom pravcu. Međutim, postoje i instrumenti kod kojih se kazaljka nalazi u neutralnom položaju na sredini skale, pa se u zavisnosti od polariteta pomera suprotno od smera kazaljke na satu ili u smeru kazaljke na satu. Kod ovih instrumenata, moguće je očitavati i pozitivne i negativne vrednosti struje u zavisnosti od načina na koji je instrument vezan u električno kolo.

Iako ovakva jednostavna konstrukcija omogućava direktno merenje DC struje, instrument sa pokretnim kalemom se uz odgovarajuće modifikacije može koristiti i kao voltmetar (za merenje napona) i kao ommetar (za merenje otpornosti).

Kada kroz kalem protiče stalna struja, delovi kalema se ponašaju kao provodnik sa stalnom strujom u homogenom radijalnom magnetnom polju indukcije B , pa na njih deluje sila F :

$$F = \frac{N}{lB} \quad \text{Relacija 107}$$

U relaciji 107 sa l je označena dužina kalema, sa B magnetska indukcija kalema i N je broj namotaja. S obzirom na geometriju sistema, na pokretni deo sistema deluje momenat M_1 koji je jednak:

$$M_1 = Fh = \frac{N}{lBh} \quad \text{Relacija 108}$$

Usled kretanja pokretnog dela sistema javlja se mehanički protiv moment M_2 koji je srazmeran uglu za koji se okrenuo pokretni deo sistema:

$$M_1 + M_2 = 0$$

$$M_2 = -K\alpha$$

Kada su momenti u ravnoteži, ugao (koji je jednak ugaonom otklonu kazaljke) srazmeran je struji kroz kolo:

$$I = C_i\alpha \quad \text{Relacija 109}$$

Osetljivost ampermetra $\frac{1}{C_i}$ sa pokretnim kalemom zavisi od magnetne indukcije, broja namotaja i dimenzije kalema i konstantne opruge:

$$\alpha = \frac{NBlh}{K} I \quad \text{Relacija 110}$$

Promenom veličina od kojih zavisi struja kroz instrument sa pokretnim kalemom, u relaciji 110, moguće je konstruisati instrumente za različite maksimalne opsege struja.

Kazaljka se kod ovog ampermetra ne postavlja trenutno u kranji položaj, već se sistem ponaša ili kao sistem prvog reda ili kao sistem drugog reda (odnosno kretanje kazalje je nelinearno sa određenim kašnjenjem).

Ako bi se na ulaze ovog instrumenta dovela AC struja, onda bi za naizmjenične struje relativno malih frekvencija, kazaljka delimično pratila promene struje ali za relativno veće frekvencije (desetak Hz) kazaljka bi zauzela položaj određen prema srednjoj vrednosti struje koja se dovodi na krajeve pokretnog dela sistema. Za naizmjeničnu ulaznu struju čija je srednja vrednost jednaka 0 pokazivanje instrumenta je 0. Na ovaj način, instrument sa pokretnim kalemom, može se koristiti za merenje AC struja, ali treba imati na umu da ovakvi instrumenti mere isključivo srednju vrednost (DC komponentu) naizmjeničnog signala.

Ranije je istaknut značaj unutrašnje otpornosti ampermetra. Za ampermetar sa pokretnim kalemom, unutrašnja otpornost R_0 je određena otpornošću samog kalema i otpornošću opruge preko koje se dovodi struja na kalem:

$$R_0 = \rho \frac{2N(l+h)}{A} \quad \text{Relacija 111}$$

Poznato je da se otpornost bakarne žice menja sa promenom temperature prema sledećoj relaciji:

$$R(T) = R(T_0)(1 + \beta_T(T - T_0)) \quad \text{Relacija 112}$$

U relaciji 112 temperaturni koeficijent β_T je jednak $4 \times 10^{-3} \text{ } 1/^\circ\text{C}$ i $T_0 = 300 \text{ K}$. Kako se ova otpornost menja, to se menja i struja koju meri ampermetar. Kako promena

temperature prilikom merenja može biti i do 10 °C, to je i promena otpornosti u tom slučaju značajna i iznosi:

$$R(T_0 + \Delta T) = R(T_0)(1 + \Delta T \beta_T)$$

$$\frac{\Delta R(\Delta T)}{R(T_0)} = \frac{R(T_0 + \Delta T) - R(T_0)}{R(T_0)}$$

$$\frac{\Delta R(\Delta T)}{R(T_0)} = \beta_T \Delta T$$

Kako bi se smanjio uticaj temperature na tačnost merenja, to se vrši temperaturna kompenzacija ampermetra sa pokretnim kalemom tako što se instrumentu redno dodaje otpornik R_K sa zanemarljivim temperaturnim koeficijentom (slika 47). Za kolo sa slike 47 sada važi:

$$I = \frac{V_T}{R_T + R_0 + R_K}$$

$$\Delta I = \left| \frac{\partial I}{\partial R} \right| \Delta R_0$$

$$\Delta I = \frac{V_T}{(R_T + R_0 + R_K)^2} \Delta R_0$$

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta R_0}{R_T + R_0 + R_K} = \frac{R_0 \beta_T \Delta T}{R_T + R_0 + R_K}$$

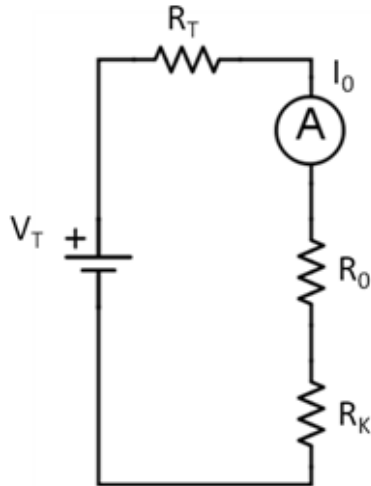
$$\left(\frac{\Delta I}{I} \right) = \frac{R_0 \beta_T \Delta T}{R_0 + R_K}$$

Vrednost otpornika R_K se može odrediti iz izraza za zadatu maksimalnu promenu struje za maksimalnu promenu temperature:

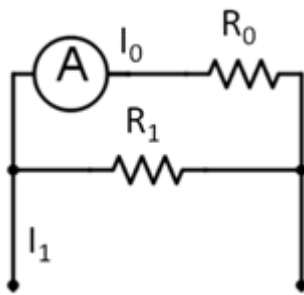
$$R_K \geq R_0 \left(\frac{\beta_T \Delta T}{\left(\frac{\Delta I}{I} \right)_{max}} - 1 \right)$$

Relacija 113

Instrumenti sa pokretnim kalemom najčešće imaju struje u opsegu od desetak μA do par mA. Unutrašnja otpornost ovih instrumenata je u rasponu od 5 Ω do 5000 Ω [29]. Ovi instrumenti mogu meriti i veće struje (umesto I_0 mogu da mere struju $I_1 > I_0$) dodavanjem paralelno vezanog otpornika R_1 i proširenjem mernog opsega kao što je prikazano na slici 48. Ograničenje ove metode je u tome što se dodavanjem ovog otpornika menja i unutrašnja otpornost instrumenta. Otpornik koji se dodaje paralelno ampermetru se naziva šant.



Sl. 47, Temperaturna kompenzacija ampermetra sa pokretnim kalemom pomoću redno dodate otpornosti R_k .



Sl. 48, Paralelno vezan otpornik R_1 (šant) sa ampermetrom unutrašnje otpornosti R_0 .

Ako se izjednači napon u paralelnim granama sa slike 48, dobija se sledeća relacija:

$$R_0 I_0 = R_1 (I_1 - I_0)$$

Iz prethodnog izraza, se na osnovu zadate maksimalne struje koju je potrebno meriti I_1 , može izračunati otpornost šanta kao:

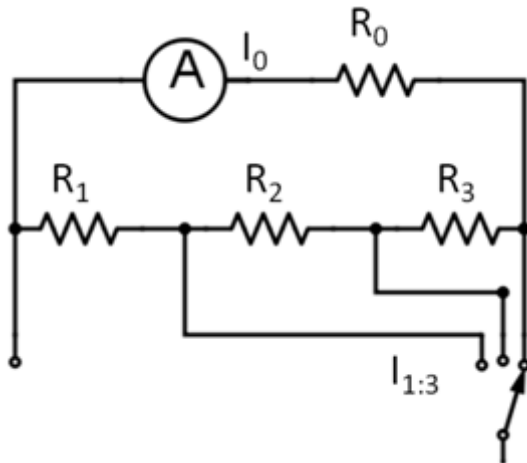
$$R_1 = \frac{R_0 I_0}{I_1 - I_0} \quad \text{Relacija 114}$$

Unutrašnja otpornost šantiranog ampermetra koji ima proširen merni opseg sada je jednaka ekvivalentnoj paralelnoj unutrašnjoj otpornosti instrumenta i šanta:

$$R_A = \frac{R_0 R_1}{R_0 + R_1} \quad \text{Relacija 115}$$

Najčešće se ovakvi instrumenti projektuju sa mehaničkim prekidačima, pa se odabirom određenog položaja tog prekidača bira opseg merenja (tj. menja se šant). Treba napomenuti da se sa promenom

šanta menja i unutrašnja otpornost instrumenta i ona je najčešće prikazana na samom instrumentu (za različite merne opsege tj. za različite šantove). Na slici 49 je prikazan jedan takav sistem od tri šanta sa mehaničkim prekidačem koji se naziva [Ayrton-ov šant](#) [29].



Sl. 49. Ayrton-ov šant za proširenje mernog opsega ampermetra unutrašnje otpornosti R_0 . Realizacija sa tri otpornika R_1 , R_2 i R_3 za merenje u tri opsega (maksimalnih struja I_1 , I_2 i I_3).

Za Ayrton-ov šant, sa slike 49 je moguće odabrati tri opsega za merenje I_1 , I_2 i I_3 . Da bi se projektovao ovakav šant, potrebno je odrediti vrednosti tri otpornika R_1 , R_2 i R_3 rešavanjem sledećeg sistema od tri jednačine i tri nepoznate:

$$(I_1 - I_0)R_1 = I_0(R_0 + R_2 + R_3)$$

$$(I_2 - I_0)(R_1 + R_2) = I_0(R_0 + R_3)$$

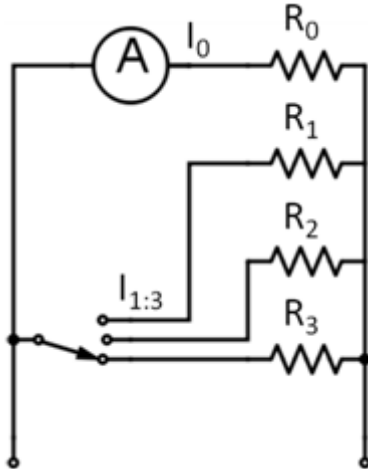
$$(I_3 - I_0)(R_1 + R_2 + R_3) = I_0R_0$$

Ayrton-ov šant je specifičan, jer sistem mehaničkih prekidača omogućava da se za izračunavanje proširenog mernog opsega koriste sve tri otpornosti. Proširenje mernog opsega može biti realizovano i sa tri nezavisna otpornika kao na slici 50.

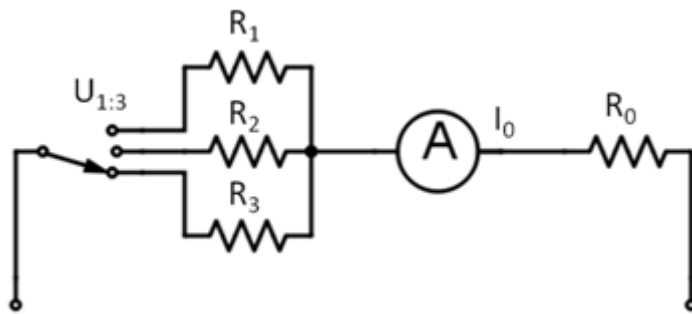
Ampermetru sa pokretnim kalemom moguće je dodati šant redno kako bi se omogućilo merenje napona. Realizacija rednog šanta za merenje napona u tri opsega je prikazana na slici 51. Mereni napon se računa prema formuli:

$$U_1 = I_0(R_0 + R_1)$$

Otpornosti šantova koji se dodaju za merenje napona su relativno velike i treba uzeti u obzir da postoji praktično ograničenje u realizaciji takvih otpornika, pa prema tome i ograničenje u merenju napona.



Sl. 50, Proširenje mernog opsega ampermetra unutrašnje otpornosti R_0 sa tri nezavisna otpornika (šanta). Vezivanjem jednog od otpornika R_1 , R_2 i R_3 moguće je realizovati merenje u tri opsega (maksimalnih struja I_1 , I_2 i I_3).

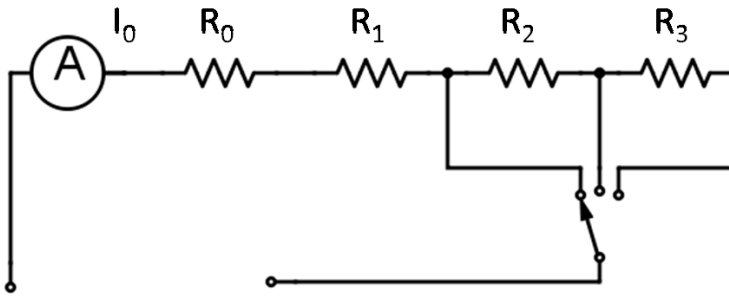


Sl. 51, Šema tri šanta sa mehaničkim prekidačem za merenje napona pomoću instrumenta (ampermetra) sa pokretnim kalemom unutrašnje otpornosti R_0 . Vezivanjem jednog od otpornika R_1 , R_2 i R_3 moguće je realizovati merenje u tri opsega (maksimalnih napona U_1 , U_2 i U_3).

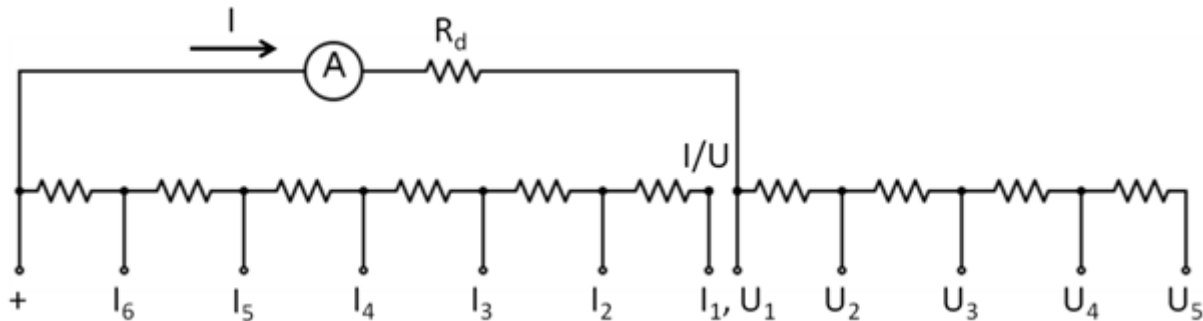
Na slici 51 je prikazana realizacija voltmetra za merenje tri različita opsega gde se šant menja prema paralelnoj vezi otpornika, a na slici 52 se šant menja po rednoj vezi otpornika. Instrument sa pokretnim kalemom se sistemom mehaničkih prekidača i realizacijom preko paralelne i redne veze otpornika može se projektovati tako da služi za merenje napona i za merenje struje kao na slici 53. Napon se računa prema sledećoj relaciji:

$$U_1 = I_0(R_0 + R_1)$$

u slučaju da je odabran šant R_1 .



Sl. 52, Realizacija voltmetra za merenje jednosmernog napona pomoću instrumenta (ampermetra) sa pokretnim kalemom unutrašnje otpornosti R_0 . Vezivanjem jednog od otpornika R_1 , R_2 i R_3 moguće je realizovati merenje u tri opsega (maksimalnih napona U_1 , U_2 i U_3).



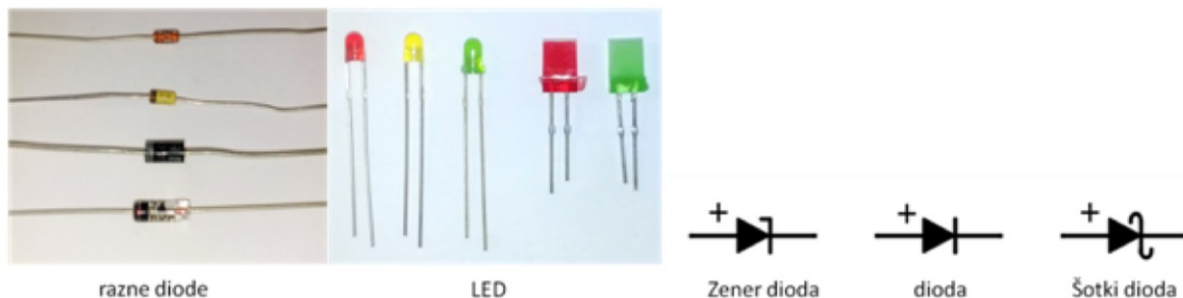
Sl. 53, Realizacija instrumenta sa pokretnim kalemom za merenje napona i struje pomoću instrumenta (ampermetra) sa pokretnim kalemom unutrašnje otpornosti R_0 .

Do sada je objašnjena metoda merenja DC napona i struje primenom instrumenta sa pokretnim kalemom. Ako bi signal koji se dovodi na ulaz ampermetra sa pokretnim kalemom bio struja sinusoidalnog oblika $i(t) = I \sin \omega t$, onda bi ampermetar sa pokretnim kalemom pokazao 0, odnosno pokazao bi da je DC komponenta signala 0. Da bi ovaj instrument mogao da meri struju naizmeničnog signala i u slučaju da je srednja vrednost jednaka 0, dodaju se ispravljači u kolo koji omogućavaju merenje izobličene signala na osnovu kog bi se dobila / procenila vrednost AC struje.

Za ovu modifikaciju AC signala, koriste se ispravljači. Ova kola se projektuju pomoću [poluprovodničkih dioda](#). Dioda (slika 54) je element sa dva terminala koji omogućava asimetričnu provodnost, odnosno provodi struju samo u jednom smeru u električnom kolu.

Idealna dioda ima otpornost koja je jednaka 0 u delu koji provodi struju i otpornost koja je jednaka beskonačno u drugom delu. Za konstrukciju diode karakteristični su poluprovodnički materijali (kao što su germanijum, selenijum i silicijum) i [p-n spoj](#) koji predstavlja spoj dva poluprovodnička materijala. Ovakva konstrukcija omogućava posebno kretanje elektrona i šupljina u ovim poluprovodničkim materijalima koja daju asimetrična provodna svojstva diodi. Najčešća upotreba dioda je za ispravljanje

signala, odnosno za konverziju AC signala u DC signal. Kako je njihova $U-I$ karakteristika nelinearna, one mogu poslužiti za regulaciju napona ili konstruisanje senzora.



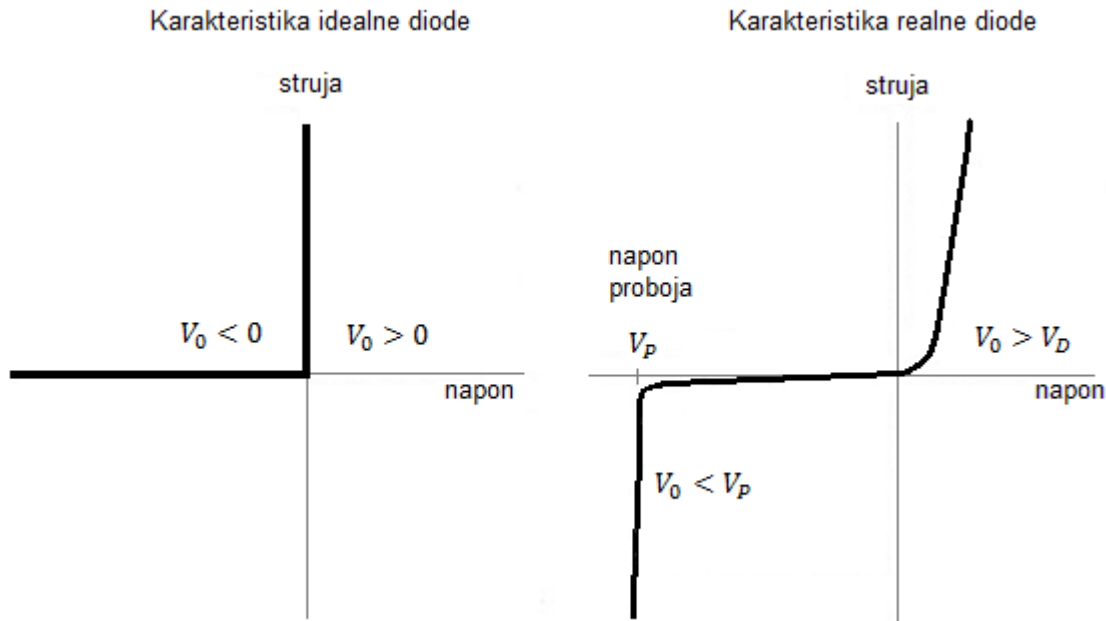
Sl. 54, Fotografija različitih tipova dioda koje se koriste u električnim kolima i LED (eng. *Light Emitting Diode*) su prikazane na levom panelu. Oznake dioda u električnim kolima sa označenim smerom provođenja su prikazane na desnom panelu.

Posebnu grupu dioda čine [LED](#) (eng. *light emitting diode*) i njihova upotreba je široko rasprostranjena. LED imaju osobinu [elektroluminencije](#), odnosno energija p-n spoja se prilikom provođenja struje kroz diodu oslobađa u formi [fotona](#). Koriste se kao indikatori u industrijskim uređajima, ima ih u [sedmo-segmentnim displejima](#), digitalnim satovima i sličnim uređajima široke potrošnje, koriste se za prostorno osvetljenje, video displejima i u senzorima.

Pored LED postoje i [fotodiode](#), vakumske diode, [Zener diode](#), [Šotki diode](#), [laserske diode](#), [tunel diode](#) i druge. Oznaka diode u električnim kolima sa ucrtanim pozitivnim polaritetom (tj. anodom) je prikazana na desnom panelu na slici 54. Proizvođači najčešće (slično kao i kod kondenzatora) obeleže na diodama (horizontalna crta) negativan polaritet tj. katodu ili je terminal katoda kraći od terminala anoda, što je najčešće slučaj sa LED-om.

Idealna dioda se ponaša kao prekidač [2]. Strujno naponske karakteristike idealne i relane diode, prikazane su na slici 55 na levom i desnom panelu, respektivno. Kada je napon idealne diode veći od 0 ($V_0 > 0$), ona provodi struju, a kada je napon manji od 0 ($V_0 < 0$), onda dioda ne provodi struju (*on / off*).

Za realnu diodu, ova karakteristika je nešto drugačija, ona ne provodi napon do napona V_d , a potom kada je napon veći od napona V_D ($V_0 > V_D$) provodi napon i ponaša se kao relativno mala otpornost. Ako bi se napon suprotnog polariteta, povećao do vrednosti probojnog napona V_P ($V_0 < V_P$), onda bi došlo do "proboja" diode i ona bi provodila struju i u suprotnom smeru [2]. Način funkcionisanja diode je u ovom primeru, prikazan za DC napon na slici 55.



Sl. 55, Strujno naponska karakteristika diode idealne i realne diode (prikazane su na levom i desnom panelu, respektivno). Pogledati tekst za dalja objašnjenja.

Diode se u praksi koriste za realizaciju kola za jednostrano i dvostrano ispravljanje (AC napon). Kada kolo sadrži samo jednu diodu (levi panel na slici 56) i kada se u to kolo dovede AC napon (oblik sinusoide) tada dioda provodi samo za pozitivne delove periode, a negativne ne provodi. Na izlazu kola za jednostrano ispravljanje se dobija jednostrano ispravljen signal u kome delovi signala koji su bili negativni postaju jednaki 0 (desni panel na slici 57).

Ako se koristi realizacija sa 4 diode kao na desnom panelu na slici 56, onda prostoperiodični napon prolazi kroz jednu granu za pozitivni deo napona, a potom kroz drugu granu za negativni deo napona. Na taj način se na izlazu dobija dvostrano ispravljen signal koji je za napon na ulazu oblika $u_{in}(t) = U \sin \omega t$ jednak njegovoj apsolutnoj vrednosti odnosno: $u_{out}(t) = |U \sin \omega t|$. Dvostrano ispravljeni signal je prikazan na levom panelu na slici 57.

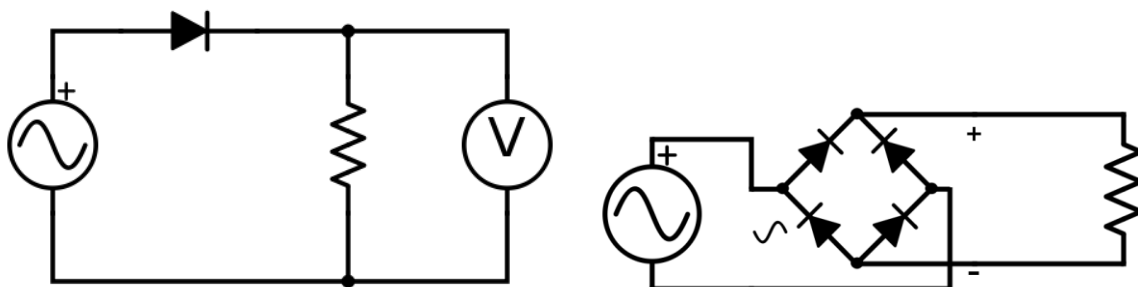
Srednja vrednost napona (odnosno jednosmerna - DC vrednost) je:

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad \text{Relacija 116}$$

Efektivna vrednost napona je:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad \text{Relacija 117}$$

Za prostoperiodičan signal srednja vrednost i efektivna vrednost napona su $U_{sr} = 0$ i $U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$, respektivno.



Sl. 56, Kola za jednostrano i dvostrano ispravljanje su prikazana na levom i desnom panelu, respektivno.

Za jednostrano ispravljanje, srednja vrednost napona je jednaka integralu pozitivne periode:

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_0 \sin(\omega t) dt$$

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

Uvođenjem smene, odnosno rešavanjem ovog integrala po $\frac{2\pi}{T} t$, dobija se:

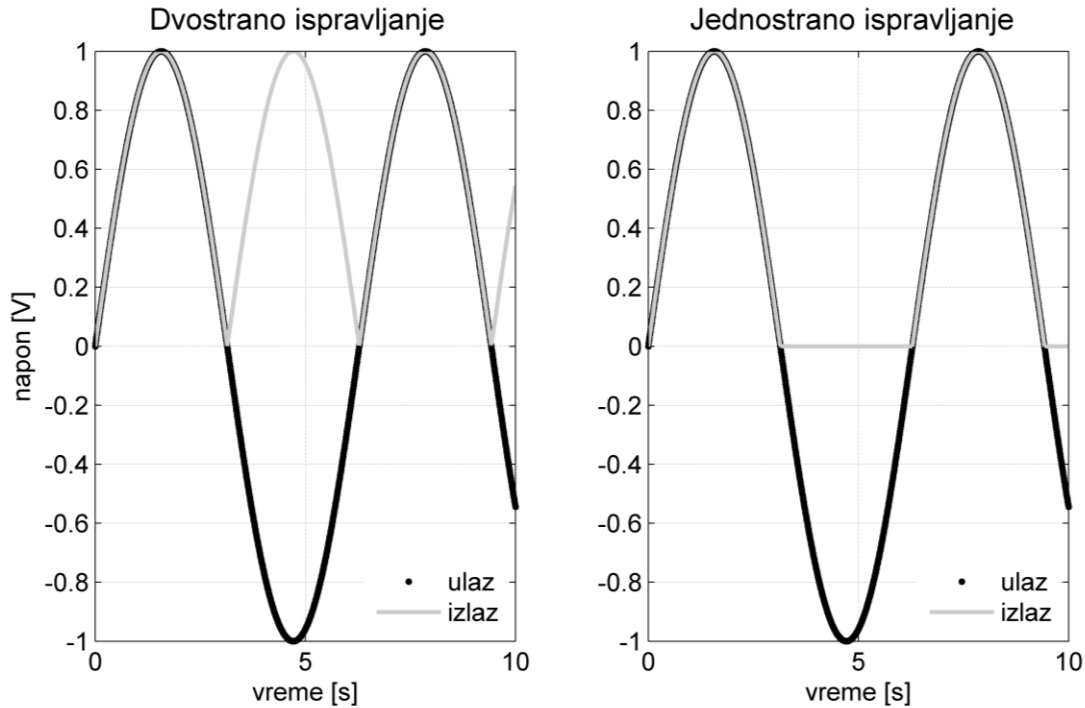
$$U_{sr} = \frac{1}{T} U_0 \frac{T}{2\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) d\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$U_{sr} = \frac{1}{T} U_0 \frac{T}{2\pi} \left(-\cos\left(\frac{2\pi T}{T} \frac{1}{2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{T} 0\right) \right)$$

Konačno, rešavanjem prethodnog izraza, dobija se srednja vrednost napona za prostoperiodičan signal:

$$U_{sr} = \frac{U_0}{\pi}$$

Relacija 118



Sl. 57, Dvostrano ispravljen signal i jednostrano ispravljen signal prikazani su na levom i desnom panelu na slici, respektivno. Ulazni signal je na oba panela označen isprekidanom linijom crne boje, a izlazni signal je označen punom linijom sive boje.

Za dvostrano ispravljanje, srednja vrednost napona je jednaka:

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_0 |\sin(\omega t)| dt$$

$$U_{sr} = \frac{1}{T} U_0 \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left(-\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right) dt + \frac{1}{T} U_0 \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt$$

Ako se za rešavanje ovog integrala uvede smena kao u prethodnom primeru, dobijaju se sledeće relacije:

$$U_{sr} = -\frac{1}{T} U_0 \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) d\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{T} U_0 \frac{T}{2\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) d\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$U_{sr} = \frac{1}{T} U_0 \frac{T}{2\pi} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}0\right) - \cos\left(-\frac{2\pi}{T}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{T}0\right) \right)$$

Napon koji prikazuje voltmetar sa pokretnim kalemom sa dvostranim ispravljanjem, jednak je srednjoj vrednosti dvostrano ispravljenog signala:

$$U_{sr} = \frac{2U_0}{\pi} \quad \text{Relacija 119}$$

Kada se mere naizmenična struja i napon, najčešće se meri efektivna, a ne srednja vrednost. Otklon kazaljke analognog instrumenta, u tom slučaju, srazmeran je srednjoj vrednosti ispravljenog signala. Za odnos efektivne i srednje vrednosti signala definiše se faktor oblika u oznaci k_f :

$$k_f = \frac{U_{eff}}{U_{sr}} \quad \text{Relacija 120}$$

Skala instrumenta se gradiše prema faktoru oblika za prostoperiodične signale. Treba napomenuti da se za merenje signala koji nisu prostoperiodični, dobija pogrešan rezultat.

Za jednostrano ispravljanje, graduacija skale instrumenta tj. faktor oblika k_f je jednak:

$$k_f = \frac{U_{eff}}{U_{srDI}}$$

$$k_f = \frac{\frac{U_0}{\sqrt{2}}}{\frac{U_0}{\pi}}$$

Iz prethodne relacije, dobija se da je graduacija skale instrumenta za jednostrano ispravljanje jednaka $k_f \approx 2.22$. Za dvostrano ispravljanje, graduacija skale instrumenta je jednaka:

$$k_f = \frac{U_{eff}}{U_{srDI}}$$

$$k_f = \frac{\frac{U_0}{\sqrt{2}}}{\frac{2U_0}{\pi}}$$

Pa se na osnovu prethodne relacije dobija i graduacija skale instrumenta za merenje prostoperiodičnog naizmeničnog napona za dvostrano ispravljanje od $k_f \approx 1.11$.

Sve prethodne relacije, osim što važe za prostoperiodični napon, one važe i za idealne diode. Kako je ranije već rečeno, relana dioda ne provodi idealno struju. Prema tome, može doći do greške u odnosu na vrednosti koje su određene prethodnim relacijama prilikom merenja napona i struje voltmetrom ili ampermetrom sa pokretnim kalemom, respektivno.

4.1.2 Instrument sa pokretnim gvoždem

Instrumenti sa pokretnim gvoždem se dele u dve grupe u zavisnosti od principa na kojima je zasnovan njihov rad [25, 29]:

1. princip odbijanja (princip rada se zasniva na primeni okruglog kalema) i
2. princip privlačenja (princip rada se zasniva na primeni pljosnatog kalema).

Za razliku od instrumenata sa pokretnim kalemom koji se pretežno koriste za merenje jednosmernih struja i napona, instrumenti sa pokretnim gvoždem se pretežno koriste za merenje naizmjeničnih struja i napona. Ovi instrumenti rade na istom principu kao i instrumenti sa pokretnim kalemom, sa razlikom što je kod njih pokretni magnetni izvor gvožđe, a ne kalem.

Pomični deo u ovim instrumentima sastavljen je od jednog ili više delova od mekog gvožđa (najčešće u obliku diska ili štapa) koja su tako pozicionirana da se nalaze unutar magnetnog polja koje proizvodi struja koja prolazi kroz provodnik u kalemu. Ta struja koja indukuje magnetno polje je struja koja se meri, a u zavisnosti od merene struje i jačine indukovanog magnetnog polja, dolazi do pomeranja mekog gvožđa koje je povezano za kazaljku [25]. Pomeranje kazaljke se posmatra i očitava se njena pozicija na skali.

Kroz kalem protiče struja koja stvara magnetsko polje. Za instrument sa pokretnim gvoždem važi:

$$M_M = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{d\alpha} \quad \text{Relacija 121}$$

Iz relacije 121 se vidi da je ugao skretanja kazaljke α proporcionalan kvadratu intenziteta struje koja se meri. Upravo zbog toga je skala ovog instrumenta kvadratna [29]. Dodatno, moguće je definisati i protivmoment M_O obrtnom momentu M_M na sledeći način.

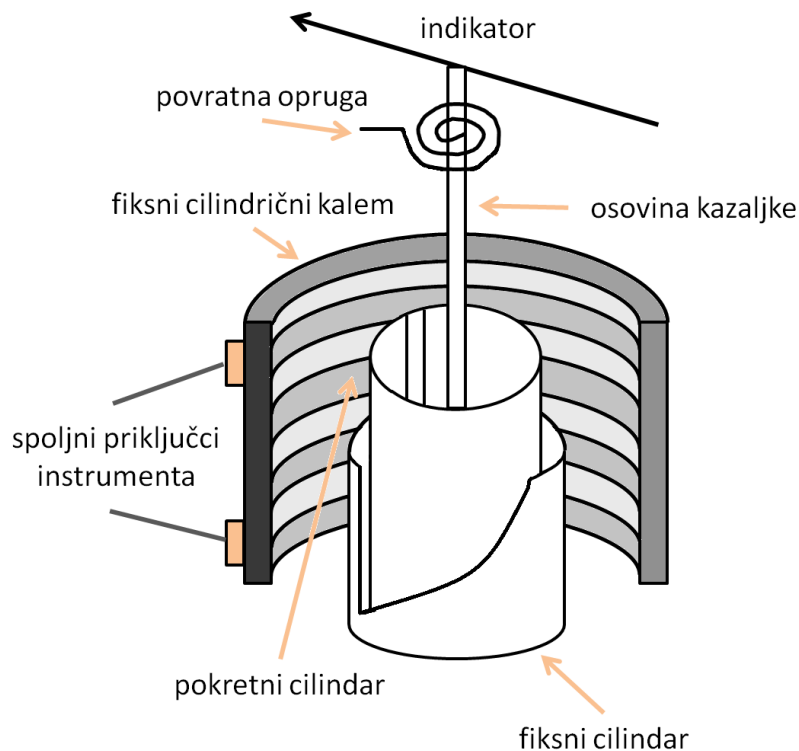
$$M_O = -K\alpha \quad \text{Relacija 122}$$

Pa je prema relacijama 121-122 za momente magnetnih polja, ugao skretanja kazaljke na instrumentu jednak:

$$\alpha = \frac{1}{2K} I^2 \frac{dL}{d\alpha} \quad \text{Relacija 123}$$

Relacija 123 pokazuje da skretanje kazaljke α zavisi od efektivne vrednosti naizmjenične struje (detalje izvođenja pogledati u [29]). Relacije 121-123 su izvedene za instrument sa pokretnim gvoždem sa pljosnatim kalemom. Relativno jednostavno je moguće pokazati da iste relacije važe i za instrument sa pokretnim gvoždem sa okruglim kalemom. Osnovni delovi instrumenta sa pokretnim gvoždem sa okruglim kalemom (instrument koji radi na principu odbijanja) su prikazani na slici 58.

Ukratko, princip rada ovih instrumenata se može opisati na sledeći način: pri prolasku naizmjenične i jednosmerne struje kroz kalem indukuje se magnetno polje koje magnetiše deo od mekog gvožđa i pokretni deo instrumenta se odbija od nepokretnog (na slici 58 to su pokretni i nepokretni cilindar).



Sl. 58, Instrument sa pokretnim gvožđem sa okruglim kalemom odbojnog tipa (eng. *repulsion type*) i sa označenim delovima.

U ovim instrumentima dolazi do indukovanja magnetnog polja (do 20 mT), pa treba voditi računa da instrument tokom rada ne dođe u kontakt sa drugim magnetnim poljem. U svrhu eliminisanja dejstva spoljnog magnetnog polja, koriste se oklopljavanje i astatički sistem [29]. Iako su ovi instrumenti robusne konstrukcije (mogu da podnesu značajno veća opterećenja od maksimalnih), treba imati na umu o sopstvenoj potrošnji koja je znatno veća u poređenju sa instrumentima sa pokretnim kalemom. Iako mogu da mere naizmenične struje, ovi instrumenti imaju grešku na većim frekvencijama (više od 1000 Hz) usled nastanka vihornih struja.

Kako je kod instrumenta sa pokretnim gvožđem otklon kazaljke srazmeran efektivnoj vrednosti struje, to se ovaj instrument može koristiti za merenje naizmenične struje. Skala ovog instrumenta nije linearna već kvadratna, ali se uglavnom postiže linearnost u većem delu skale odgovarajućim projektovanjem (uobičajeno 20% do 100% od pune vrednosti skale, a maksimalno 5% do 100% od pune skale instrumenta [29]). Ovi instrumenti mogu da mere relativno velike struje (do 50 A) i napone (do 800 V). Za proširenje mernog opsega ovih instrumenata ne koriste se šantovi, ali se koriste različiti namotaji za različite merne opsege.

Iako instrument sa pokretnim gvožđem može da meri naizmenične napone i struje, treba imati na umu da se to odnosi na napone i struje sinusoidalnog oblika. Međutim, u praksi nisu svi signali koji se mere sinusoide. True (u prevodu sa engleskog istinit, tačan) RMS (eng. *root mean square*) je opcija koju poseduje veći broj digitalnih multimetara, a ona označava da instrument pokazuje tačnu efektivnu

vrednost signala nezavisno od oblika signala. Do sada je pokazano kako instrumenti rade sa prostoperiodičnim naponima. Međutim, u praksi se mogu sresti i drugi talasni oblici (pogledati tabelu 9) kao što su pravougaoni impulsi, trougaoni impulsi i drugi. Instrument sa pokretnim gvožđem na svom izlazu prikazuje True RMS vrednost napona.

RMS vrednost napona, može se odrediti i za analogne i za kontinualne AC signale. U kontinualnom domenu, za napon $u(t)$, RMS vrednost U_{RMS} je definisana, na nekom konačnom intervalu $[T_2, T_1]$ kao:

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} [u(t)]^2 dt} \quad \text{Relacija 124}$$

Za digitalne signale, RMS vrednost se definiše kao:

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2} \quad \text{Relacija 125}$$

U relaciji 125 za RMS sa u_i su označeni diskretni odbirci signala i sa n je označen broj odbiraka. Za periodične signale, RMS se definiše za jednu periodu, a za signale koji predstavljaju kombinaciju drugih signala (na primer: signal se sastoji iz "čisto" naizmenične i "čisto" jednosmerne komponente) se računa kao:

$$U_{RMS} = \sqrt{U_{RMS_AC}^2 + U_{RMS_DC}^2} \quad \text{Relacija 126}$$

Tabela 9, Vrednosti napona karakterističnih oblika signala. Sa U_{sr} je označena srednja vrednost signal, sa $|U_{sr}|$ je prikazana srednja vrednost dvostrano ispravljenog signala, sa U_{eff} efektivna vrednost signala, sa $U_{eff}^{AC} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (u - U_{sr})^2 dt}$ je označena efektivna vrednost naizmeničnog dela signala, sa $k_f |U_{sr}|$ je prikazana efektivna vrednost koju pokazuje instrument sa dvostranim ispravljanjem, sa **True RMS** je označena efektivna vrednost koju prikazuje True RMS instrument i sa rel je prikazana relativna greška ($rel = \frac{U_{sr} - U_{eff}}{U_{eff}}$) za tri različita talasna oblika signala.

Signal	U_{sr}	$ U_{sr} $	U_{eff}	U_{eff}^{AC}	$k_f U_{sr} $	True RMS	rel
Sinusoida	0	$\frac{2U}{\pi}$	$\frac{U}{\sqrt{2}}$	$\frac{U}{\sqrt{2}}$	$1.11 U_{sr} = U_{eff}$	U_{eff}	0.000
Impuls (faktor ispunjenosti 50%)	0	U	U	U	$1.11 U_{sr} = 1.11U$	U_{eff}	0.110
Trougaoni	0	$\frac{U}{2}$	$\frac{U}{\sqrt{3}}$	$\frac{U}{\sqrt{3}}$	$1.11 U_{sr} = 0.56U$	U_{eff}	-0.038

Za realne signale koji imaju srednju vrednost koja je jednaka 0, amplituda signala se predstavlja ili kao srednja vrednost njihove apsolutne vrednosti ili kao RMS vrednost. Češće je u upotrebi RMS vrednost, jer je srazmerna sa snagom signala.

4.1.3 Princip rada digitalnih instrumenata

Elektronski analogni instrumenti su preteča današnjih digitalnih instrumenata. Da bi signal mogao da se meri digitalnim instrumentom potrebno je digitalizovati signal. Ovaj proces uključuje diskretizaciju signala po vremenu (uzorkovanje ili odabiranje, eng. [sampling](#)) i [diskretizaciju](#) po amplitudi.

Da bi se signal diskretizovao po vremenu, potrebno je odabrati vremenske trenutke u kojima će se snimati amplituda signala. Najčešće se ti vremenski trenuci biraju ekvidistantno, odnosno tako da budu ravnomerno rapoređeni. Vremenski interval između dva snimanja / merenja se naziva perioda odabiranja ΔT . Za ovu periodu definiše se i frekvencija odabiranja f_s kao:

$$f_s = \frac{1}{\Delta T} \quad \text{Relacija 127}$$

Frekvencija odabiranja se uobičajeno navodi u Herzima (Hz), ali tačna jedinica frekvencije odabiranja je odbirak po sekundi (eng. *samples per second* u oznaci S/s). U zavisnosti od procesa tj. signala koji se snima bira se pogodna frekvencija odabiranja. Na primer, za merenje temperature sobe bilo bi nepotrebno i neisplativo da se temperatura sa senzora snima svakih 100 ms, ako je sasvim dovoljno da se snima temperatura na svakih par minuta. S druge strane, ako se radi o brzopromenljivom signalu (relativno velike frekvencije) kao što je prostoperiodični napon onda mora da postoji dovoljno veliki broj odbiraka da bi originalni signal mogao da se rekonstruiše.

[Nikvist-Šenonova teorema](#) odabiranja definiše minimalan broj odbiraka tj. minimalnu frekvenciju odabiranja koju je potrebno odabrati kako bi se na odgovarajuć način (bez gubitaka) diskretizovao signal u vremenu. Prema ovoj teoremi frekvencija odabiranja treba da bude:

$$f_s \geq 2f_m \quad \text{Relacija 128}$$

U prethodnom izrazu (relacija 128) f_m je najveća frekvencija signala koji se diskretizuje. U slučaju prostoperiodičnog signala, frekvencija odabiranja je bar dva puta veća od frekvencije prostoperiodičnog signala. Praktično se frekvencija odabiranja bira tako da bude 5-10 puta veća od najveće frekvencije u signalu [21].

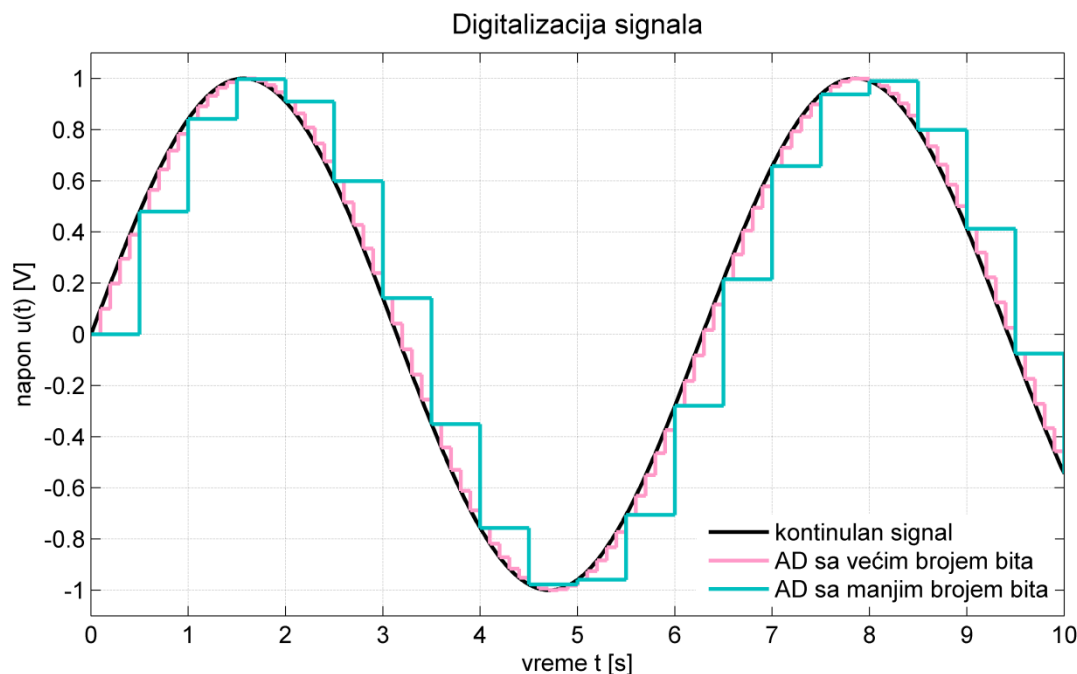
Za realne procese i signale najčešće se ne može reći da su prostoperiodični ili složenoperiodični, jer sadrže veliki broj frekvencija u svom spektru (što se proverava nakon razvoja u Furijeov red tj. primenom [Furijeove transformacije](#)). Kada se na ove realne signale primeni frekvencija odabiranja koja zadovoljava Nikvist-Šenonovu teoremu odabiranja, može doći do grešaka u rekonstrukciji signala. Ta pojava se naziva [alajzing](#) (eng. *aliasing*).



Sl. 59, Blok šema uređaja za merenje signala sa osnovnim elementima: K – predobrada (kondicioniranje signala), AF - antialajzing filter, S / H – pamti prati kolo (eng. *sample and hold*) i A / D – analogno / digitalni konvertor (eng. *analog to digital converter*), B - bafer i PC (eng. *Personal Computer*) - računar (u opštem slučaju namenski računar).

Kako bi se sprečila ova pojava koriste se antialajzing filtri prilikom kondicioniranja signala (pre nego što signal dođe do A/D (eng. *analog to digital converter*) konvertora) kao što je prikazano na slici 59. U tom bloku filtrira se (tj. odstranjuje se) brzopromenljiv deo signala (deo signala kome odgovaraju veće frekvencije). Na slici 59 je prikazana blok šema uređaja za merenje signala na kome je označen antialajzing filter.

Uloga kondicioniranja signala će biti detaljno objašnjena u sledećim poglavljima. S / H (eng. *sample and hold*) kolo ima ulogu da izmerenu vrednost analognog signala zadrži konstantnom do trenutka sledećeg merenja. Učestanost merenja je određena frekvencijom odabiranja signala. Uloga ostalih elemenata uređaja za merenje signala, čija je blok šema prikazana na slici 59 će biti objašnjena u daljem tekstu.



Sl. 60, Karakteristika kvantizacije dva A / D konvertora (sa većim i manjim brojem bita) u procesu digitalizacije kontinualnog naponskog signala $u(t)$.

Osim diskretizacije po vremenu, da bi se signal digitalizovao, potrebno je izvršiti i diskretizaciju po amplitudi. Cilj ove diskretizacije je da se amplituda signala koji je kontinualan preslika u jednu vrednost iz diskretnog (ograničenog) skupa. Proces diskretizacije po amplitudi uključuje dodeljivanje neke diskretne vrednosti amplitude analognom signalu u vremenskim trenucima koji su određeni frekvencijom odabiranja. Karakteristika kvantizacije odnosno diskretni skup amplitudskih nivoa je prikazan na slici 60.

Apsolutna greška kvantizacije e_A se definiše kao:

$$e_A = x_q - x_{tacno} \quad \text{Relacija 129}$$

Greška određena relacijom 129 može biti pozitivna i negativna. Osim apsolutne, definiše se i relativna greška kvantizacije koja takođe može biti i pozitivna i negativna:

$$e_A = \frac{x_q - x_{tacno}}{x_{tacno}} \quad \text{Relacija 130}$$

U relaciji 130 za grešku kvantizacije su sa x_q i x_{tacno} predstavljene diskretizovana i tačna vrednost amplitude, respektivno.

Za apsolutnu grešku kvantizacije važi sledeća relacija:

$$-\frac{\Delta x}{2} \leq e_A < \frac{\Delta x}{2} \quad \text{Relacija 131}$$

Greška kvantizacije zavisi od broja bita sa kojom je predstavljena kvantizovana vrednost. Tipično se broj bita bira kao stepen broja 2, pa su neke uobičajene vrednosti 8, 16 i 32. U praksi se sreće i broj bita 12 za A / D konverziju. Broj bita n definiše broj kvantizacionih nivoa 2^n koje ima A / D konvertor. Treba imati na umu da je najbolje iskoristiti ceo broj bita na opsegu u kom se nalazi signal. Merenje je tačnije što je rezolucija A / D konvertora veća, odnosno što je broj bita veći. Jedan od glavnih parametara u određivanju cene A / D konvertora je broj bita A / D konverzije. Preporučljivo je da se, pre nego što se odabere odgovarajući A / D konvertor i njegova rezolucija, prikupi što više informacija o signalu koji se meri i o cilju merenja kako bi se napravio odgovarajući kompromis između cene i kvaliteta A / D konverzije.

Neka se za merenje analognog naponskog signala čija je amplituda u opsegu [0 5] V koristi A / D kartica [NI USB 6212](#) (National Instruments Inc., Austin, USA). Ova kartica na analognim ulazima AI (eng. *analog input*) može da meri u opsegu [-10 10] V sa rezolucijom od 16 bita. Korak kvantizacije je u tom slučaju $20 \text{ V} / 2^{16} \approx 0.3 \text{ mV}$. Međutim, ovaj korak kvantizacije se može smanjiti dodatnim podešavanjem prilikom merenja sa ovom karticom tako da se svih 16 bita iskoristi na opsegu koji odgovara ulaznom signalu, pa je novi korak kvantizacije jednak $5 \text{ V} / 2^{16} \approx 0.08 \text{ mV}$.

Za računanje merne nesigurnosti tipa B, prilikom merenja digitalnim instrumentima od ključne je važnosti poznavanje rezolucije A / D konvertora. Za apsolutnu grešku kvantizacije se može pretpostaviti da ima uniformnu raspodelu na sledećem intervalu:

$$\left[-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2} \right)$$

Odnosno, smatra se da su na definisanom intervalu sve vrednosti greške kvantizacije podjednako verovatne, pa se funkcija gustina verovatnoće može definisati kao:

$$p(e) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & -\frac{\Delta}{2} \leq e < \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Relacija 132

Za ovako definisanu funkciju gustine verovatnoće (relacija 132), moguće je odrediti srednju vrednosti \bar{e} i varijansu σ_e^2 prema sledećim relacijama:

$$\bar{e} = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} ep(e)de$$

$$\bar{e} = \frac{1}{2\Delta} \left(\left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 - \left(-\frac{\Delta}{2} \right)^2 \right)$$

$$\bar{e} = 0$$

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 p(e) de$$

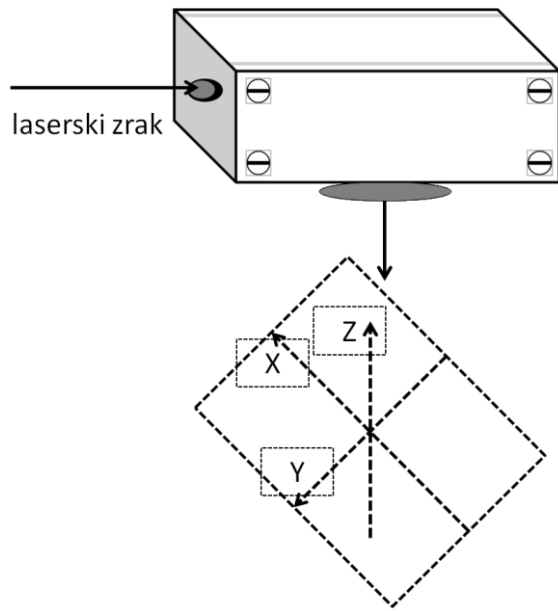
$$\sigma_e^2 = \frac{1}{3\Delta} \left(\left(\frac{\Delta}{2} \right)^3 - \left(-\frac{\Delta}{2} \right)^3 \right)$$

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}$$

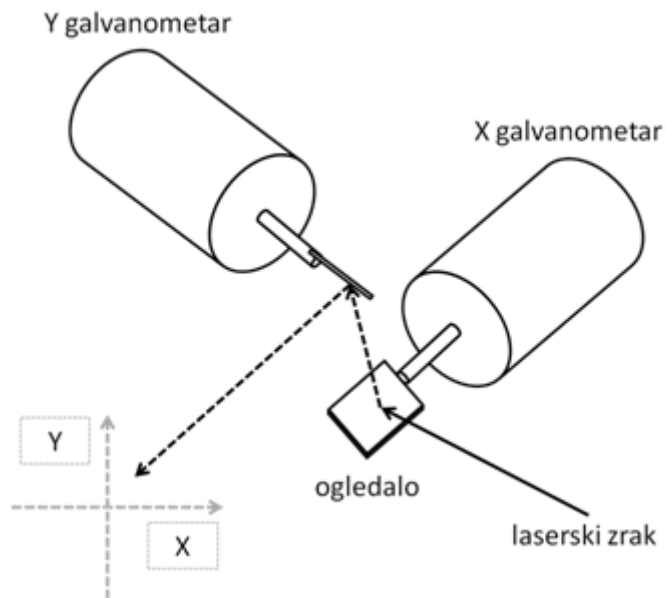
Postoje različite vrste A / D konvertora u zavisnosti od realizacije diskretizacije signala po amplitudi: 1) paralelni fleš konvertori, 2) konvertori sa generatorom rampe, 3) konvertori sa dvojnim nagibom, 4) konvertori sa sukcesivnim aproksimacijama i 5) sigma – delta konvertori [40].

4.1.4 Galvanometri u savremenim električnim merenjima

Danas se [galvanometerski mehanizam](#) uglavnom koristi u sistemima pozicioniranja i sistemima upravljanja. Prema principu rada, galvanometri se dele na galvanometar sa pokretnim kalemom i galvanometar sa pokretnim gvožđem. Dodatno, oni se mogu podeliti i na galvanometre koji rade u zatvorenoj povratnoj sprezi, u otvorenoj povratnoj sprezi i na rezonantne galvanometre.



Sl. 61, Princip rada laserskog skenera zasnovanog na primeni galvanometra.



Sl. 62, XY skeniranje pomoću dva galvanometra.

Galvanometri imaju primenu u sistemima za skeniranje koji su zasnovani na primeni lasera (kao što je skeniranje bar kodova pomoću lasera kao što je prikazano na slici 61) [22]. U sistemima servo pozicioniranja hard diskova računara i u CD i DVD plejerima, takođe se koriste galvanometri.

Uglavnom se u svim praktičnim primenama koriste galvanometri sa pokretnim kalemom kako bi se njihova masa i vreme odziva sveli na minimum. Jezgro od gvožđa u kalem u galvanometru se koristi za usmereno generisanje magnetnog polja kada kroz kalem protiče struja.

Laserski skener se sastoji iz dva galvanometra koji su pozicionirani ortogolano (normalno) jedan na drugi (slika 62) za koje su fiksirana ogledala koja se pomeraju u X i Y pravcu. Galvanometar u ovom slučaju se ponaša kao motor čije je skretanje rotora kontrolisano ulaznim naponom. Usled relativno male mase celog sistema, ogledala koja su fiksirana na galvanometrима mogu da se kreću relativno brzo. Cilj ovog sistema je da se na osnovu ulaznog zraka projektuje 2D slika pomoću dva galvanometra na koji su dodata dva ogledala.

Princip rada laserskog skenera sa dva galvanometra (2D skeniranje) se zasniva na preusmeravanju laserskog zraka koji dolazi na ogledalo galvanometra X do ogledala galvanometra Y , nakon čega se zrak prikazuje (slika 62) [13]. Smer zraka se određuje na osnovu upadnih uglova zraka na oba ogledala.

4.2 Karakteristike mernih instrumenata

Svi merni instrumenti poseduju određene karakteristike koje je važno znati prilikom merenja sa ciljem smanjenja uticaja sistematske greške i sa ciljem odabira pogodnog načina za određivanje merne nesigurnosti prilikom merenja. Osnovne karakteristike mernih instrumenata¹³ su [35]:

1. statička karakteristika mernog sredstva,
2. tačnost,
3. preciznost,
4. razlaganje,
5. linearnost,
6. osetljivost,
7. pokretljivost i prag pokretljivosti,
8. stabilnost,
9. ponovljivost,
10. histerezis,
11. ulazna impedansa,
12. i druge.

Tačnost instrumenta je sposobnost da se prikazuje merena vrednost koja je bliska tačnoj vrednosti te veličine (npr. za Gausovu raspodelu procenjena srednja vrednost neke veličine i njena tačna vrednost su relativno bliske).

¹³ Relativno veliki deo nabrojanih karakteristika je opšteg značaja i ne odnosi se samo na merne instrumente, već i na senzore i merne metode. Videti sledeće poglavlje.

Preciznost instrumenta je sposobnost instrumenta da prikazuje vrednosti koje su međusobno bliske pri ponovljenim merenjima (npr. za Gausovu raspodelu standardna devijacija i odstupanje su relativno mali). Razlaganje je sposobnost instrumenta da jasno razlikuje dve merene veličine koje su bliske. Odnosno, to je sposobnost instrumenta da meri u uslovima u kojima je prisustvo šuma smanjeno kako bi se jasno uvidela razlika između dve bliske merene veličine.

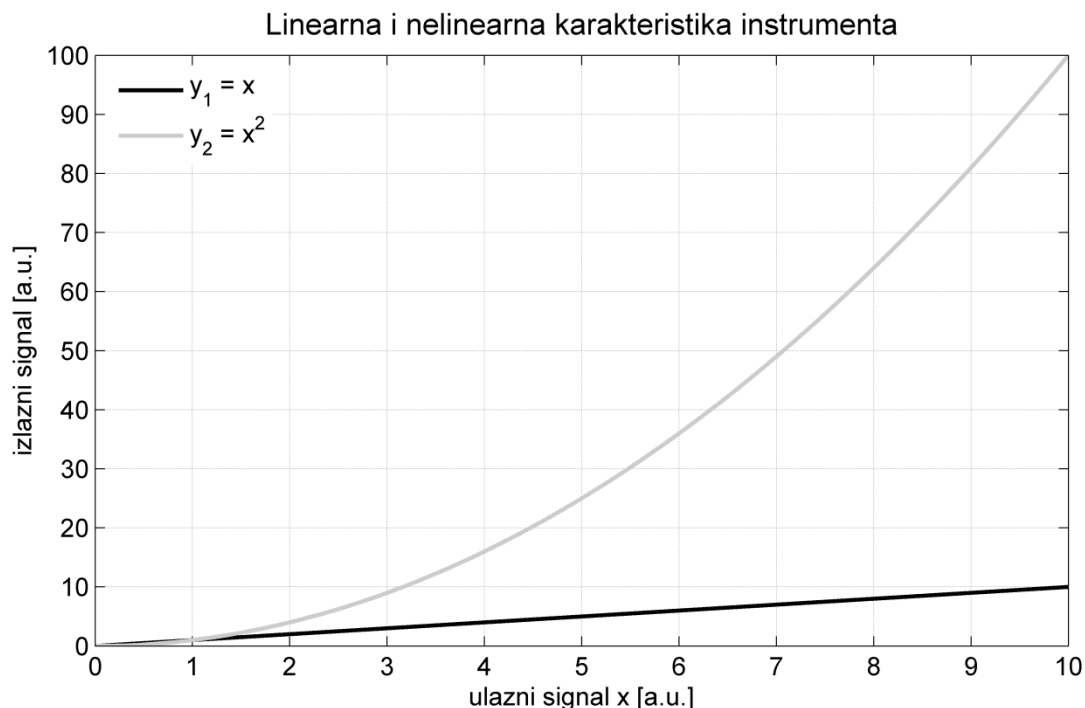
Rezolucija instrumenta je najmanji korak sa kojim se može prikazati neka merena veličina.

Linearnost instrumenta je njegovo svojstvo da su ulazni x i izlazni signal y linearno zavisni:

$$y = a_0 + a_1x$$

Relacija 133

U prethodnom izrazu (relacija 133) sa a_1 i a_2 su označene konstante linearne karakteristike. Da li će instrument biti linearan ili ne zavisi od principa na kome se zasniva rad tog instrumenta. Na slici 63 dat je primer linearne i nelinearne karakteristike instrumenta.



Sl. 63, Primer linearne karakteristike instrumenta ($y_1 = x$): zavisnost amplitude ulaznog od amplitude izlaznog signala je linearna. Primer nelinearne kvadratne karakteristike instrumenta ($y_2 = x^2$): zavisnost amplitude ulaznog od amplitude izlaznog signala je kvadratna.

Kada je karakteristika instrumenta nelinearna, tada ona u opštem slučaju može biti jednaka polinomu sa beskonačno mnogo koeficijenata, a u realnom slučaju broj tih koeficijenata jednak je nekom konačnom broju n :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

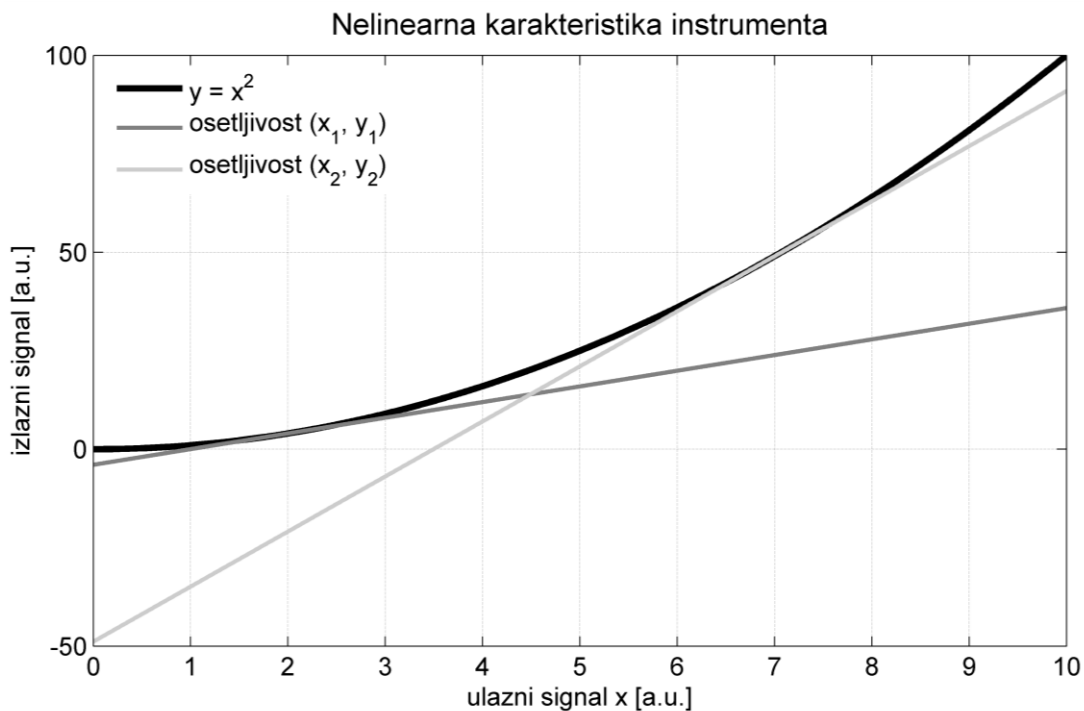
Relacija 134

Na slici 63 je dat primer nelinearne karakteristike instrumenta kada je zavisnost ulaznog i izlaznog signala kvadratna, odnosno za polinom drugog reda ($n = 2$).

Osetljivost instrumenta K se definiše kao količnik (odnos) priraštaja izlaznog i ulaznog signala. Za linearne instrumente, osetljivost K je konstanta u celom opsegu i definisana kao odnos priraštaja izlaznog signala Δy i ulaznog signala Δx kao:

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{Relacija 135}$$

Kod nelinearnih instrumenata osetljivost nije konstanta kao kod linearnih i definiše se samo u određenim tačkama (kao na slici 64). U odabranoj tački nelinearne karakteristike instrumenta osetljivost se izračunava kao koeficijent pravca tangente kroz tu tačku.

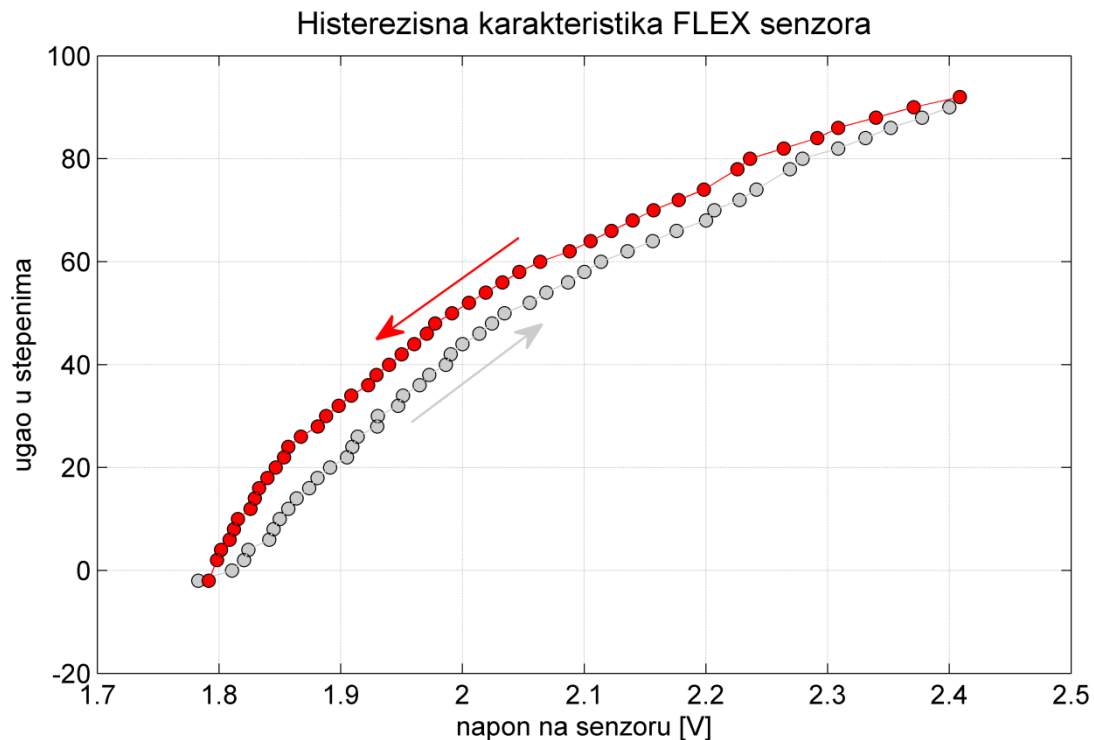


Sl. 64, Primer računanja osetljivosti nelinearne karakteristike ($y = x^2$) za dve tačke: tangente nelinearne karakteristike su prikazane za dve tačke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) .

Stabilnost instrumenta je sposobnost instrumenta da održava konstantnim svoju funkciju prenosa usled promene metroloških karakteristika.

Ponovljivost je sposobnost instrumenta da daje bliske (što sličnije) odzive na izlazu prilikom ponovljenog postavljanja istih signala na ulazu. Odnosno, to je svojstvo instrumenta da pri ponovljenim merenjima iste veličine daje za rezultat istu vrednost.

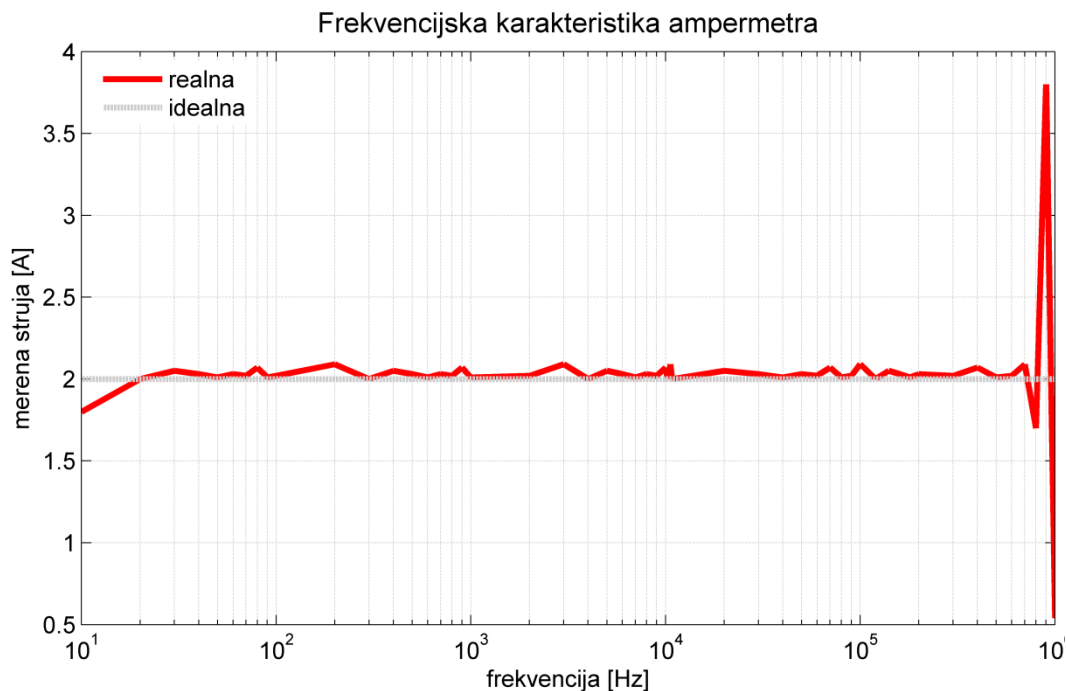
Iako se histerezis modeluje kao sistematska greška prilikom merenja, postojanje histerezisa može da dovede do ukupnog povećanja merne greške. Najčešće se sistematska korekcija vrši na osnovu snimljene krive (kao na slici 65) i pri tome se zabeleži informacija da li se radi o opadajućem ili rastućem redosledu vrednosti. Međutim, postoje slučajevi kada nije uvek na raspolaganju informacija o smeru histerezisa. Tada se uzima u obzir opseg u kome se može naći merena vrednost δ_x i onda se na osnovu tog opsega određuje merna nesigurnosti tipa B (pod pretpostavkom uniformne raspodele) kao $u_B = \frac{\delta_x}{\sqrt{12}}$.



Sl. 65, Histerezis je svojstvo mernog sistema da merena vrednost zavisi od redosleda prethodnih uaznih signala. Na slici je prikazan primer histerezisne karakteristike FLEX senzora ([SparkFun Electronics, USA](#)) za merenje ugla od 0 do 90 stepeni.

Sve prethodno pobrojane karakteristike instrumenta su bile statičke. Međutim, merni instrument je definisan i dinamičkim karakteristikama kao što su vreme odziva i frekventijska karakteristika. Frekventijska karakteristika definiše zavisnost amplitude ili faze izlaznog signala od frekvencije ulaznog signala. Na primer, ako ampermetar sa pokretnim gvožđem meri AC napon onda osim granica jačine struje za koje je projektovan ampermetar (amplitudski radni opseg), postoje i ograničenja u frekvenciji merenog signala (frekventijski radni opseg).

Da bi se snimila frekventijska zavisnost mernog instrumenta potrebno je u kolo redno vezati strujni generator koji ima mogućnost da generiše AC signale relativno širokog frekventijskog spektra, ispitivani ampermetar i etalonski ampermetar.



Sl. 66, Amplitudska frekvencijska karakteristika ampermetra sa logaritamskom frekvencijskom skalom. Eksperimentalno određen radni frekvencijski opseg je [20 Hz 700 kHz].

Etalonski ampermetar ima poznatu frekvencijsku karakteristiku u opsegu koji se posmatra [10 Hz 1 MHz], a na ispitivanom ampermetru se meri struja amplitude 2 A za različite vrednosti frekvencija. Što je korak promene frekvencije manji, to je karakteristika preciznija. Potom se iscrtava vrednost struje ispitivanog ampermetra u odnosu na merenu frekvenciju (kao na slici 66). Sa ove slike se vidi da je pokazivanje ampermetra netačno na početku i na kraju opsega, pa se na osnovu toga jednostavno određuje u kom je opsegu ampermetar imao prihvatljivu grešku merenja struje za primenjene frekvencije. Uobičajeno, vrednost struje se predstavlja preko slabljenja u dB, radi preglednosti.

U zavisnosti od tačnosti i preciznosti koje zahteva određeno merenje, mogu se definisati i podopsezi unutar radnog opsega. Na primer, radni opseg može biti podeljen na uži i širi tako da užem radnom opsegu odgovara greška od $\pm 2\%$, a širem radnom opsegu od $\pm 7\%$.

Detalji ostalih dinamičkih karakteristika nisu predmet razmatranja ovog udženika, pa neće biti dalje objašnjeni, a mogu se naći u [35].

4.3 Specijalizovani merni instrumenti

Projektovanje mernih instrumenata, osim ako se ne radi o razvojnim industrijskim odeljenjima i laboratorijama, nema mnogo praktičnog značaja. Međutim, poznavanje principa rada ovih instrumenata je od neprocenjivog edukativnog značaja i važan je preduslov za odabir instrumenta i za realizaciju merenja.

U praksi se uobičajeno koriste gotovi merni instrumenti, pa će najčešće korišćeni instrumenti biti objašnjeni u ovom poglavlju bez posebnog zadržavanja na određeni tip instrumenta ili na instrument određenog proizvođača iako su navedeni neki pojedinačni primeri.

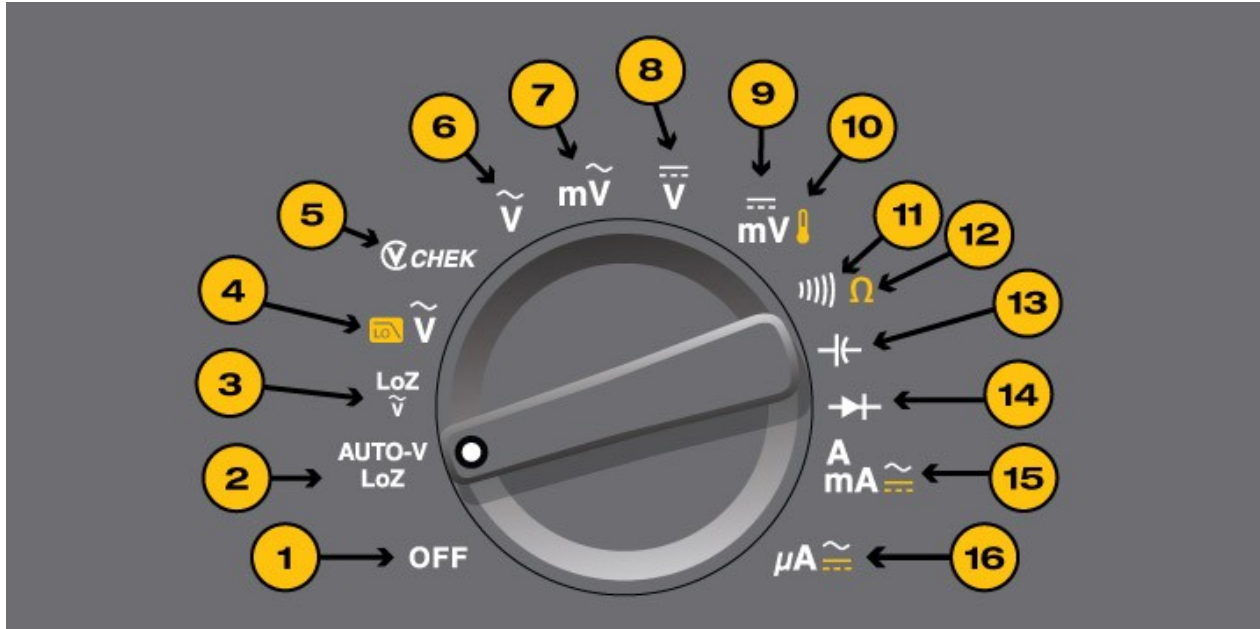
4.3.1 Digitalni multimeter

Korisnički interfejs jednog digitalnog multimetra tj. unimetra (DMM) je prikazan na slici 67. Ovo je najčešće korišćeni instrument u laboratorijama za električna merenja. DMM je instrument koji u sebi sadrži više instrumenata kao što su ommetar, voltmetar, ampermetar i drugi i u najvećem broju slučajeva prikazuje rezultat merenja na sedmosegmentnom displeju.

Neke opcije koje poseduje DMM su prikazane na slici 67. DMM može sadržati i neke druge opcije, kao što su merenje frekvencije AC signala. Takođe, merni opsezi se mogu razlikovati u zavisnosti koji je instrument odabran. Uobičajene opcije DMM-a su prikazane na slici 67 su [8]:

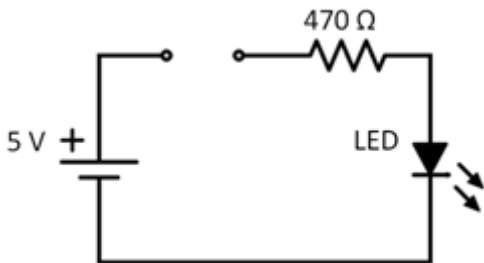
1. u ovom položaju instrument je isključen (U svim ostalim položajima instrument je uključen i uobičajeno postoji LED indikator koji signalizira da li je instrument uključen ili isključen. U nekim slučajevima ovaj indikator označava i stanje baterije.),
2. opcija za voltmetar sa automatskim podešavanjem opsega, LoZ označava manju ulaznu impedansu,
3. voltmetar za merenje AC napona sa LoZ,
4. voltmetar za merenje AC napona sa filtrom propusnikom niskih frekvencija,
5. opcija za simultano testiranje napona i kratkog spoja,
6. merenje relativno većih AC napona (reda V),
7. merenje relativno manjih AC napona (reda mV),
8. merenje relativno većih DC napona (reda V),
9. merenje relativno manjih DC napona (reda mV),
10. merenje temperature,
11. provera kratkog spoja (koristi se u kombinaciji sa *sound button* - zvučni signal koji odgovara kratkom spoju),
12. ommetar (merenje otpornosti),
13. merenje kapacitivnosti,

- 14. diodni test,
- 15. merenje AC i DC amplituda struje reda A i mA i
- 16. merenje AC i DC amplituda struje reda μA .



Sl. 67, Korisnički interfejs digitalnog multimetra sa označenim opcijama. Slika je preuzeta uz dozvolu od Fluke Corporation (Reproduced with Permission, Fluke Corporation).

Većina nabrojanih opcija, bila je objašnjena u prethodnim poglavljima. Međutim, nisu objašnjeni test kratkog spoja (eng. [continuity test](#)) i diodni test. Ima više načina kako test kratkog spoja može da se realizuje [15].



Sl. 68, Primer kola za ispitivanje kratkog spoja elementa koji se dovodi na priključke koji su na slici prikazani kao otvorena veza.

U nekim instrumentima povratna informacija o tome da li kratak spoj postoji ili ne je LED indikator ili zvučni signal. Na primer, to može biti kolo u kome su redno povezani izvor napajanja, otpornik i LED sa priključcima za merenje kratkog spoja (slika 68). Kada se na krajeve instrumenta dovede kratak spoj, onda LED svetli, a ako se dovede neka velika otpornost ili dva terminala čija je veza otvorena, onda dioda ne svetli [15].

Diodni test se takođe često sreće kao opcija u DMM-u [17]. Ovaj test se sprovodi kada se na priključke instrumenta dovede dioda kroz koju ne postoji nikakvo spoljašnje napajanje. Potrebno je HI i LO terminale DMM-a povezati u jednom smeru i zabeležiti vrednost na ekranu, a potom za obrnut smer vezivanja HI i LO terminala izmeriti vrednost na ekranu. Ako je dioda povezana u smeru u kome ona provodi struju tada bi trebalo da se na ekranu instrumenta pojavi vrednost napona od 0.5 V do 0.8 V za silicijumske diode ili od 0.2 V do 0.3 V za germanijumske diode. Kada krajevi HI i LO zamene mesta, dioda bi trebalo da se ponaša kao otvorena veza odnosno da ne provodi, pa bi na ekranu trebalo da se pojavi poruka "OL" (eng. *open lead*).

Ako ne postoji diodni test u DMM instrumentu onda se može koristiti i ommetar za ispitivanje rada diode. Ako je dioda pozitivno polarisana (provodi struju koja dolazi iz multimetra) trebalo bi očekivati otpornost od 1000 Ω do 10 M Ω . U slučaju da je dioda povezana tako da ne provodi (negativno polarisana), trebalo bi da se pojavi "OL" na ekranu DMM-a.

Bilo da se dioda ispituje diodnim testom ili ommetrom, napajanje ne sme biti uključeno u kolo u kome se nalazi dioda i merni rezultat bi trebalo da se razlikuje za pozitivno i negativno polarisanu diodu.

4.3.2 Osciloskop

[Osciloskop](#) je uređaj koji se koristi u laboratorijama u kojima se vrše električna merenja i služi za merenje signala i njihovu vizuelizaciju pomoću 2D grafika u funkciji od vremena. Na osciloskopu se posmatra i meri napon. Međutim, korišćenjem odgovarajućih konvertora moguće je meriti struju ili druge signale. Postoje analogni i digitalni osciloskopi.

Savremeni digitalni osciloskopi, osim vizuelizacije signala, određivanja amplitude, frekvencije i faze, omogućavaju i memorisanje signala, povezivanje osciloskopa sa računarom i analizu signala.

Detaljno objašnjenje osnovnih principa rada osciloskopa, kao i uputstvo za rad sa osciloskopom može se naći u priručniku [28], koji uključuje i tri atlasa: [Atlas Lisažuovih figura: Određivanje faznog stava](#), [Atlas Lisažuovih figura: Određivanje odnosa frekvencija](#) i [Atlas Lisažuovih figura: Degenerisane krive](#).

4.3.3 LCR metar

[LCR](#) metar je instrument koji se koristi za merenje impedanse i nezaobilazna je oprema u laboratorijama (slika 69). Impedansa je važan parametar u električnim kolima, ali je isto tako i svojstvo elektronskih komponenti i materijala koji se koriste za izradu komponenti.

Ime LCR metra je nastalo od oznaka za tri pasivna elementa koji označavaju impedansu: L – induktivnost, C – kapacitivnost i R – otpornost. Impedansa je važan parametar u svim električnim kolima i može se definisati kao ukupan otpor propagaciji AC (eng. *alternating current*) za datu frekvenciju kroz električno kolo.



Sl. 69, Fotografija LCR metra uz dozvolu od © Keysight Technologies, Inc. (Reproduced with Permission, Courtesy of Keysight Technologies © Keysight Technologies, Inc.)

Impedansa se može predstaviti u vektorskoj ravni, ali i kao kompleksan broj. Čine je realni deo rezistansa R i imaginarni deo [reaktansa](#) X u zapisu:

$$Z = R + jX \quad \text{Relacija 136}$$

Impedansa Z u prethodnom zapisu u relaciji 136 može se prikazati u pravougaonom koordinatnom sistemu i jednostavna je za proračune kada postoji redna veza više impedansi. Moguće je predstaviti impedansu i u polarnom koordinatnom sistemu preko modula kompleksnog broja $|Z|$ i faze θ :

$$Z = |Z|e^{j\theta} \quad \text{Relacija 137}$$

Za impedansu određenu relacijom 137 važi:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

Kada postoji paralelna veza impedansi, uobičajeno se koristi recipročna prezentacija impedanse u obliku:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = Y = G + jB$$

Relacija 138

U prethodnom izrazu (relacija 138) sa Y označena je [admitansa](#), sa G [konduktansa](#) i sa B [susceptansa](#). Reaktansa X može biti kapacitivna X_C ili induktivna X_L i u tom slučaju se predstavlja sledećim relacijama:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{\omega C}$$

$$X_L = 2\pi fL = \omega L$$

U prethodnim relacijama sa C je označena kapacitivnost, sa L induktivnost, sa f frekvencija i sa ω kružna frekvencija. S obzirom da je impedansa kompleksna veličina (sastoji se iz realnog i imaginarnog dela), da bi se izmerila impedansa potrebno je izmeriti bar dve vrednosti. Ako nije odabrana odgovarajuća merna tehnika LCR metra, može se desiti da instrument pokaže netačnu vrednost merenja [19].

Parazni efekti su uvek prisutni u realnim komponentama, pa svaka komponenta ima tačnu vrednost, efektivnu vrednost i merenu vrednost. Tačnu vrednost nije moguće izmeriti, a efektivna vrednost odgovara teorijskom pretpostavljenom modelu impedanse i parazitnih efekata. Prema tome, cilj merenja je da se smanji razlika efektivne i merene vrednosti tj. greška merenja, pa sa tim ciljem treba odabrati mernu metodu.

Osim odabira odgovarajućeg modela na rezultat merenja mogu da utiču i sledeći faktori [14]:

1. frekvencija - osnovna zavisnost svih realnih komponenti je frekvencijska, jer postoje parazitni efekti,
2. test signal - kod komponenti koje su izrađene od različitih materijala, postoji zavisnost od test signala,
3. DC zavisnost - karakteristična je za poluprovodničke komponente (diode, tranzistori i dr.),
4. temperatura - najčešće temperaturna zavisnost postoji kod otpornika i kondenzatora,
5. i druge (na primer: vlažnost, magnetsko polje, vibracije).

Na osnovu zahteva merenja i uslova merenja (na primer: frekvencija, merni opseg, tačnost merenja, način rukovanja instrumentom) potrebno je odabrati odgovarajući metodu merenja impedanse. Na primer *auto-balancing* most se koristi za merenja do 40 MHz, za merenja u opsegu od 400 Hz do 100 MHz koristi se U / I metoda i za merenja veća od 100 MHz koristi se *Network Analysis* metoda [14].

Do sada su neke od ovih metoda već objašnjene, pa je pokazano i kako Kelvinovi kontakti mogu da kompenzuju otpornost kontakta. Međutim, pri korišćenju Kelvinovih kontakta takođe postoji ograničenje u dužini kontakta koje je u direktnoj vezi sa frekvencijom na kojoj se ispituje impedansa. Najčešće se

usvaja sledeća aproksimacija: $F \times L \leq 15$ [14]. U ovoj aproksimaciji, sa F je označena frekvencija u MHz, a sa L je označena dužina kabla koji se koristi u m. U slučaju da ovaj uslov nije ispunjen, *auto-balancing* most neće raditi. Takođe, mogu postojati odstupanja od date formule, jer postoji dužina kablova / kontakta unutar instrumenta koja se mora uzeti u obzir ako je proizvod frekvencije i dužine jednak približno 15.

Najčešće je dužina kabla / kontakta kojim se nepoznata impedansa vezuje za instrument jednaka 1 m, 2 m ili 4 m. Ako postoje projektni zahtevi da se koriste duži kablovi, onda se koriste ekstenzije koje su šildovane (eng. [shielded cable](#)). Svrha šildovanja je da se smanji / spreči nastanak magnetskog polja koje se stvara unutar provodnika.

Do greške, tokom merenja impedanse, može doći usled neodgovarajuće fiksacije kontakta. Za potrebe fiksacije kontakta, koriste se različiti konektori, a neki poznati su tzv. krokodilke (eng. [crocodile clips](#)), [BNC](#) (eng. *Bayonet Neill-Concelman connector*) konektori, [SMC](#) (eng. *subminiature version C*) konektori i drugi [14].

Postoji više metoda kompenzacije prilikom merenja LCR metrom, koje mogu da povećaju tačnost merenja. Kompenzacija za otvoren i kratak spoj ima za cilj da se izmeri impedansa u ovim karakterističnim uslovima (po ugledu na NULL merenje pomoći DMM-a). Prilikom kompenzacije treba imati na umu da:

1. ako se kompenzacija vrši prilikom otvorenog spoja onda je potrebno održati isto rastojanje između kontakata, jer može doći do parazitnih kapacitivnih efekata (vazduh između kontakata se ponaša kao dielektrik),
2. ako se kompenzacija vrši prilikom kratkog spoja onda se ili fizički kratko spoje krajevi ili se dodaje element koji menja "kratak spoj" (Ako je vrednost prilikom ove kompenzacije veća od vrednosti elementa kom se meri impedansa, onda je potrebno menjati kratak spoj).

Ako se merenje vrši sa modelom redne ili paralelne veze, onda se merenje izvodi sa jednom frekvencijom. Međutim, ako se prilikom merenja pretpostavlja model sa 3 ili više elemenata, onda je potrebno da se merenje vrši sa većim brojem frekvencija.

4.3.3.1 Princip rada LCR metra

U svakom LCR metru postoje dva režima rada (eng. *mode*): serijski i paralelni. Svakom od ova dva režima odgovara pretpostavljeni model ekvivalentnog realnog kola (serijsko ili paralelno ekvivalentno kolo) za koji se meri impedansa. Pre svakog merenja od značaja je za tačnost merenja odabir odgovarajućeg režima rada [19].

Za rednu vezu važe sledeće relacije:

$$|Z| = \sqrt{R_s^2 + X_s^2}$$

$$D = \frac{1}{Q} = \frac{R_s}{X_s}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{X_s}{R_s} \right)$$

Relacija 139

U prethodnim izrazima (relacija 139) sa R_s je označen relani redni element - rezistansa, a sa X_s je označen imaginarni redni element - reaktansa. Imaginarni deo X_s može biti ili induktivan ($X_s = X_L = \omega L_s$) ili kapacitivna ($X_s = X_C = -\frac{1}{\omega X_C}$), a sa D je predstavljen faktor gubitaka i sa Q faktor dobrote. Sa θ je označen ugao faznog stava, a sa $|Z|$ moduo impedanse.

U slučaju paralelne veze, važe sledeće relacije:

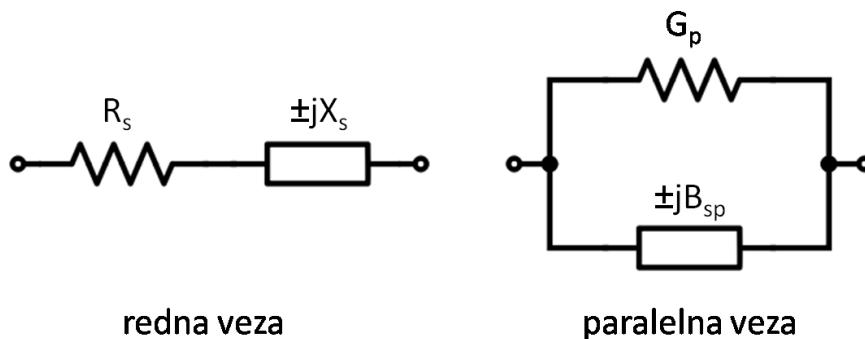
$$|Y| = \sqrt{G_p^2 + B_p^2}$$

$$D = \frac{1}{Q} = \frac{G_p}{B_p}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{B_p}{G_p} \right)$$

Relacija 140

U prethodnim izrazima (relacija 140) sa G_p je označen realni paralelni element - konduktansa, a sa B_p je označen imaginarni paralelni element - susceptansa. Imaginarni deo B_p može biti ili induktivan ($B_p = B_L = -\frac{1}{\omega L_p}$) ili kapacitivna ($B_p = B_C = \omega X_C$), a sa D je predstavljen faktor gubitaka i sa Q faktor dobrote. Sa θ je označen ugao faznog stava, a sa $|Y|$ moduo admitanse. Redna i paralelna veza su prikazane na slici 70 na levom i desnom panelu, respektivno.



Sl. 70, Redna i paralelna veza sa označenim realnim i imaginarnim elementima.

Moguće je izraziti realne i imaginarne delove impedanse i za paralelno i za redno kolo preko faktora gubitaka D . Moguće je definisati i vezu između elemenata paralelnog i rednog kola:

$$Z = R_s + jX_s$$

$$R_s = R_p \frac{D^2}{1 + D^2}$$

$$R_p = R_s \left(1 + \frac{1}{D^2} \right)$$

$$X_s = \frac{X_p}{1 + D^2}$$

$$X_p = \frac{X_s}{1 + D^2}$$

Princip rada LCR metra se zasniva na primeni sledećih metoda za merenje nepoznate induktivnosti [19]:

- merni most,
- rezonantna metoda,
- merenje struje i napona (I / U metoda) i
- automatizovani most (eng. *autobalancing bridge*).

Ranije su već objašnjene primene mernih mostova i U / I metoda. U nastavku ovog poglavlja biće detaljno objašnjene metode merenja impedanse automatizovanim mostom i rezonantnom metodom.

4.3.3.1.1 Automatizovani most

Kako bi se izmerila impedansa neophodno je meriti napon koji je doveden na krajeve elementa čija se impedansa meri i struju koja kroz njega protiče. Najčešće se element čija se impedansa meri u električnim kolima obeležava sa DUT od eng. *device under test* [19]. Šema za merenje impedanse DUT-a uključuje voltmetar i / ili ampermetar.

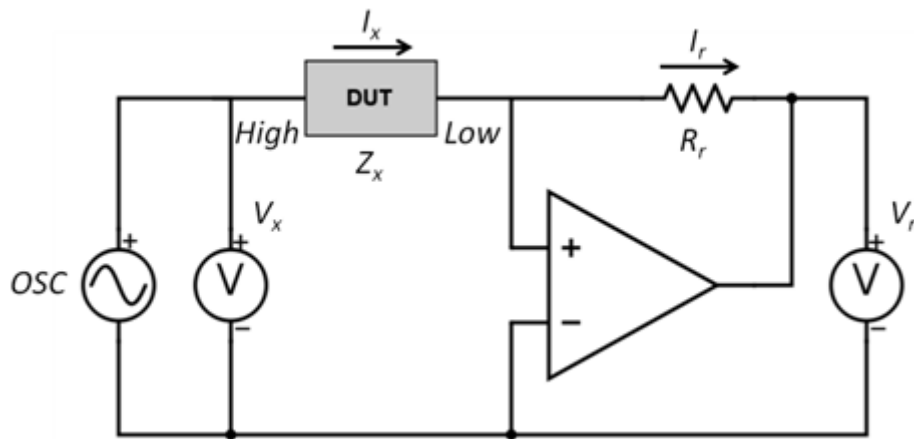
Za LCR metar u niskom frekvencijskom opsegu merenja (tipično ispod 100 kHz) koristi se [operacioni pojačavač](#) kao I / V konvertor (slika 71). Strujom I_x se podešava struja I_r koja prolazi kroz otpornik R_r (eng. *range resistor*) preko I / V konvertora [19]. Potencijal tačke "Low" se održava na 0 V (zato se često naziva i virtuelna masa). Impedansa DUT-a se meri pomoću napona na "High" terminalu (V_x) i napona na otporniku R_r (V_r):

$$\frac{V_x}{Z_x} = I_x = I_r = \frac{V_r}{R_r}$$

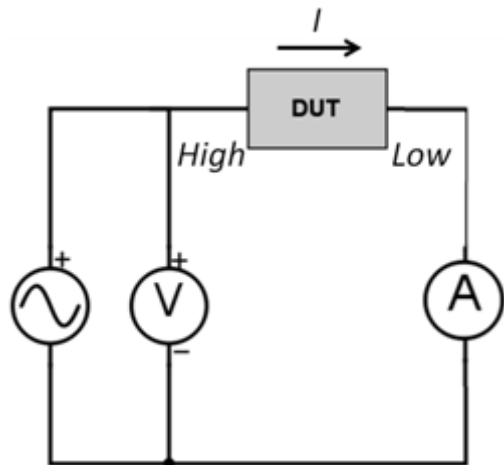
$$Z_x = \frac{V_x}{R_x} = R_r \frac{V_x}{V_r}$$

Najjednostavniji model automatizovanog mosta je prikazan na slici 72 i u njemu važi sledeća relacija [19]:

$$Z = \frac{V}{I}$$

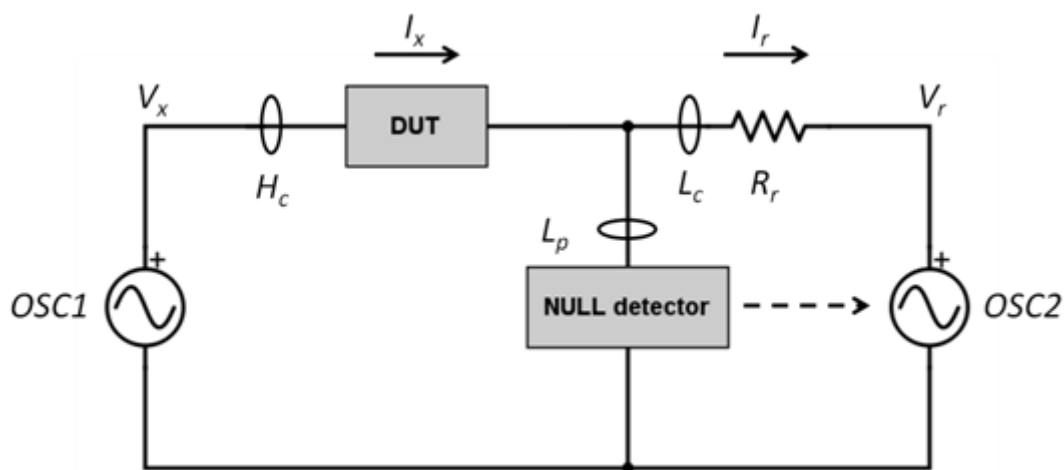


Sl. 71, Automatizovani most za merenje nepoznate impedanse elementa DUT.



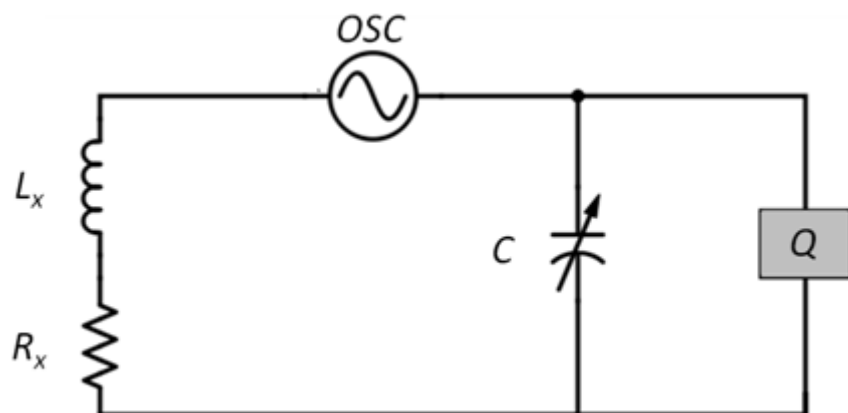
Sl. 72, Model najjednostavnijeg automatizovanog mosta za merenje nepoznate impedanse elementa DUT.

Za merenje na većim frekvencijama (> 1 MHz) kao I / V konvertori (konverzija struje u napon) se koriste detektori nule (eng. *null detector*), fazni detektori, integratori i modulatori vektora kako bi se obezbedila odgovarajuća tačnost merenja. Najčešće ovakvi instrumenti mogu da mere impedanse za frekvenciju do maksimalno 110 MHz. Primer realizacije automatizovanog mosta sa detektorom nule je prikazan na slici 73 [19].



Sl. 73, Detektor nule (eng. *Null detector*) u automatizovanom mostu za merenje nepoznate impedanse elementa DUT.

4.3.3.1.2 Rezonantna metoda



Sl. 74, Opšta šema za merenje nepoznate impedanse koja se sastoji iz induktivnog elementa označenog sa L_x i otpornika R_x u kolu primenom direktne rezonantne metode.

Kada se kolo sa slike 74 dovede u rezonanciju podešavanjem promenljivog kondenzatora C , moguće je izmeriti nepoznatu induktivnost L_x i otpornost R_x . Ovo važi pod uslovom da su poznate rezonantna frekvencija, kapacitivnost C i faktor dobrote Q poznatog kalema. Q se meri direktno pomoću voltmetra koji je povezan paralelno sa kondenzatorom C (slika 74) [19].

Postoje i električna kola koja koriste rezonantnu metodu za merenje redne i paralelne veze. Za detalje pogledati [14, 19].

4.3.3.2 Primer merenja impedanse sa LCR metrom

Kako u opštem slučaju nije poznata impedansa koja se meri, a samim tim ni njen imaginarni ni kompleksni deo to je preporuka da se za veliki faktor gubitaka D (odnosno mali faktor dobrote Q) kada je dominantan realni deo impedanse, vodi računa o izboru odgovarajućeg ekvivalentnog kola. Za obrnut slučaj, tj. kada je mali faktor gubitaka D i veliki faktor dobrote Q (dominantan je imaginarni deo impedanse) ne postoji velika razlika u rezultatu merenja za odabir odgovarajućeg modela (serijska i paralelna veza).

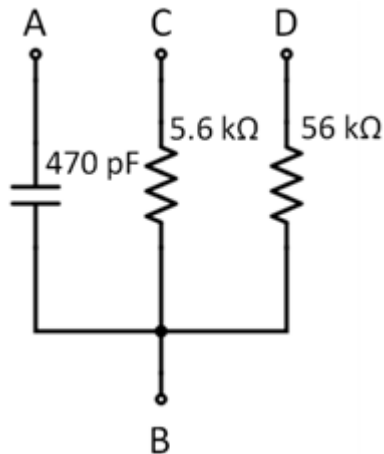
Ako se meri kapacitivnost realnog kondenzatora ili induktivnost realnog kalema, tada ne postoji velika razlika u zavisnosti od odabira odgovarajućeg modela (serijske ili paralelne veze). Kako je relacija između serijskih i paralelnih elemenata u funkciji od D^2 , onda sledi da kada je D manje od 0.03 tada je razlika između C_p i C_s (L_p i L_s) manja od 0.1% ($\sim 0.03^2$), odnosno D i Q ne zavise od odabranog kola.

Ako je na primer $D = 0.0029$ i ako je vrednost na ekranu LCR metra $C_p = 21.936$ pF tada je ispunjen uslov da je $D < 0.03$, pa je $C_s \sim C_p$, odnosno odabir rednog ili paralelnog modela kola nema uticaja na tačnost merenja.

Neka je na primer potrebno za kolo dato na slici 75 izmeriti impedansu [39]. Neka se na ulaze LCR metra dovode sledeće tačke na kolu: AB, BC i BD sa slike 75, a potom neka je potrebno izmeriti impedansu kada se uređaj dovede na tačke AC i AD.

U konfiguraciji u kojoj se meri impedansa u granama AC i AD, mere se kapacitivnosti i faktori gubitaka. U tabeli 10 su dati rezultati merenja impedanse u sledećim granama u kolu sa slike 75: AB, AC i AD. Primitivi da je za merenje na kontaktima AB na slici 75 na instrument povezan samo kondenzator, pa ne postoji otpornost R (videti tabelu 10), a faktor gubitaka zadovoljava uslov $D < 0.03$, odnosno nema razlike da li se koristi serijska ili paralelna veza.

Najvažnije prilikom merenja kapacitivnosti i induktivnosti je poznavanje realnih osobina ovih komponenti i odabir odgovarajućeg ekvivalentnog kola (paralelnog ili rednog). U nastavku primera biće pokazano kako je na osnovu poznavanja frekvencije test signala, moguće analitički odrediti pokazivanja LCR metra za pretpostavljen serijski i paralelni model veze.



Sl. 75, Primer kola za merenje impedanse. Ilustracija kola je prilagođena primeru iz [39].

Tabela 10, Prikaz merenja LCR metrom za kolo sa slike 76. Primer je prilagođen iz [39]. Sa D je označen faktor gubitaka, a sa R_S i R_p su prikazane otpornosti serijske i paralelne veze, respektivno.

kontakt	C [pF]	D	R [kΩ]	R_S [kΩ]	R_p [MΩ]
AB	469.4	0.002	-	0.68	169.5
AC	468.9	0.016	5.586	5.425	21.2
AD	455.8	0.169	56.08	57.30	2.0

U serijskom modelu kondenzator je predstavljen kao idealna kapacitivnost (C_S) redno vezan sa otpornikom (R_S). Faktor gubitaka se u tom slučaju računa kao:

$$D = \omega C_S R_S$$

gde je $\omega = 2\pi f$, za f koje predstavlja frekvenciju test signala LCR metra (neka je odabrano da je 1 kHz) i $C_S = 469.4$ pF. U tabeli 10 su prikazane teoretske vrednosti dobijene za R_S na osnovu prethodne jednačine. Ovi rezultati imaju relativno dobro slaganje sa merenim vrednostima.

U paralelnom modelu, kondenzator je predstavljen kao idealna kapacitivnost (C_p) paralelno vezana sa otpornikom (R_p). Faktor gubitaka se u tom slučaju izračunava kao:

$$D = \frac{1}{\omega C_p R_p}$$

Kapacitivnosti dobijene na osnovu ova dva modela realnih kondenzatora su povezane sledećom relacijom:

$$C_S = C_p(1 + D^2)$$

Ovaj model [39] za računanje pokazivanja LCR metra je moguće primeniti i ako se umesto kondenzatora u kolo sa slike 75 poveže kalem.

5 MERENJE NEELEKTRIČNIH VELIČINA

U ovom poglavlju objašnjeno je merenje neelektričnih veličina primenom metoda i instrumentacije za merenje električnih veličina. Najčešće se pre primene prethodno opisanih metoda i instrumenata vrši konverzija neke fizičke veličine u električnu veličinu primenom posebno za to namenjenih uređaja.

Pretvarač je uređaj koji omogućava konverziju jedne u drugu fizičku veličinu. Senzor je pretvarač koji omogućava pretvaranje neke fizičke veličine u električnu. Da bi se izmerila fizička veličina, neophodno je primeniti metode merenja električnih veličina i odgovarajuće transformacije koje su rezultat odabira senzora. Postoji relativno veliki broj senzora koji se koriste u različitim primenama i koji se zasnivaju na različitim principima detekcije. Primer senzora rastojanja koji se koristi u automobilskoj industriji dat je na slici 76.

Ako za funkcionisanje senzora (pretvaranje neke fizičke veličine u električnu) nije potrebno dodatno ulaganje energije, tada se takav senzor naziva pasivni senzor. Međutim, ako je potrebno dodatno ulaganje energije (izvor napajanja), onda je senzor aktivan. Pasivni senzori mogu biti i neki od osnovnih pasivnih elemenata električnih kola čiji je princip merenja opisan u prethodnim poglavljima. Na primer, senzor može biti i otpornik koji promenu električne veličine otpornosti pretvara u fizičku veličinu promenu toplote. Takav senzor se naziva termistor.



Sl. 76, Primer primene senzora rastojanja u automobilima. Slika je preuzeta sa sajta uz dozvolu i zahvalnost [Volkswagen-u UK](#) (With thanks to Volkswagen UK).

Neke osnovne statičke karakteristike senzora su:

1. radni opseg (minimalna i maksimalna vrednost koju senzor može da meri),
2. stabilnost,
3. tačnost i preciznost,
4. histerezis,

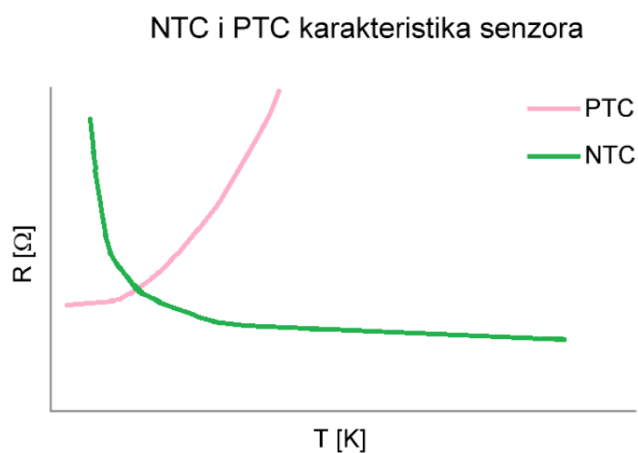
5. rezolucija (najmanja promena veličine koju je moguće detektovati),
6. ponovljivost i
7. linearnost (izlazni signal je linearna funkcija ulaznog sistema).

Za digitalne senzore rezolucija senzora je određena rezolucijom A / D konverzije. Ako je rezolucija 12 bita, a naponski opseg merenog signala 0-5 V, tada je rezolucija merenja tim sensorom $5/2^{12} = 0.0012$ V.

5.1 Princip rada senzora / pretvarača

5.1.1 Merenje promene otpornosti

Princip rada senzora i pretvarača koji su zasnovani na promeni otpornosti biće prikazan u ovom poglavlju na primeru termistora. [Termistor](#) (eng. *thermally sensitive resistor*) je otpornik čija se otpornost menja u zavisnosti od temperature. Koristi se za merenje temperature, ali i za temperaturnu kompenzaciju u električnim kolima. Postoje NTC i PTC termistori. NTC termistor (eng. *negative temperature coefficient*) je otpornik kod koga se otpornost smanjuje sa povećanjem temperature. PTC termistor (eng. *positive temperature coefficient*) je otpornik kod koga se otpornost povećava sa povećanjem temperature. Češće je u upotrebi NTC termistor [5]. Primer zavisnosti otpornosti PTC i NTC termistora od temperature je prikazan na slici 77.



Sl. 77, Ilustracija zavisnosti otpornosti NTC i PTC termistora od temperature.

Osnovna prednost termistora u odnosu na druge senzore temperature je relativno visoka osetljivost i relativno niska cena. Na primer, osetljivost termistora može biti i do 200 $\Omega / ^\circ\text{C}$. Otpornost termistora je nelinearna funkcija temperature. Najčešće se zavisnost otpornosti od temperature modelira sa [Steinhart-Hart](#) jednačinom (SH model) u sledećem obliku:

$$\frac{1}{T} = A + B \ln(R_t) + C (\ln(R_t))^3 \quad \text{Relacija 141}$$

U relaciji 141 sa R_t je označena otpornost (u Ω) termistora na temperaturi T (u K), a A , B i C su konstante termistora i važi $A > B > C$. Uobičajeno uputstvo proizvođača sadrži vrednosti za A , B i C . Moguće je i eksperimentalno odrediti ove parametre. Osim SH modelom moguće je predstaviti zavisnost otpornosti od temperature i preko β (ili B) modela u obliku:

$$\ln(R_t) = A + \frac{\beta}{T} \quad \text{Relacija 142}$$

gde je R_t otpornost termistora (Ω), T temperatura (K), β (K) i A su konstante termistora. Za neku referentnu temperaturu T_0 (na primer sobnu temperaturu), važi da je:

$$\ln(R_{t0}) = A + \frac{\beta}{T_0}$$

Oduzimanjem prethodna dva izraza dobija se:

$$\begin{aligned} \ln(R_t) - \ln(R_{t0}) &= \ln\left(\frac{R_t}{R_{t0}}\right) \\ \ln\left(\frac{R_t}{R_{t0}}\right) &= \beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) \end{aligned}$$

Na osnovu prethodnog izraza, mogu se napisati izrazi za R_t i za T :

$$R_t = R_{t0} e^{\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)} \quad \text{Relacija 143}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{R_t}{R_{t0}}\right) + \frac{1}{T_0} \quad \text{Relacija 144}$$

Prednost ovog modela u odnosu na prethodni (SH model) je što su potrebna dva umesto tri merenja temperature kako bi se odredila zavisnost otpornosti od temperature. Mana je što ovaj odnos važi za uži opseg temperatura u odnosu na SH model.

Postoji niz drugih rezistivnih senzora i pretvarača koji se koriste u praksi i koji omogućavaju merenje različitih fizičkih veličina. Najrasprostranjenija je primena merne trake (eng. [strain gauge](#)) koja se zasniva na tenzo-otpornom istezanju. Odnosno, moguće je meriti promenu otpornosti merne trake koja je rezultat njenog istezanja [35]. Merne trake se proizvode od žice, tankog filma ili poluprovodnih materijala i obično su takvih konstrukcija da omogućavaju merenje istezanja / deformacija u jednom pravcu. U zavisnosti od konstrukcije, merne trake je moguće koristiti i za merenje ubrzanja, vibracija, pritiska i drugih fizičkih veličina. Postoje otpornici koji su osim na promenu temperature (termistori) i na

istezanje (merne trake), osetljivi na promenu elektromagnetnog zračenja (osvetljaja). Ti otpornici se nazivaju fotootpornici (eng. [photoresistor](#)).

Princip projektovanja mernog sistema za merenje promene otpornosti ovih senzora se u najvećem broju slučajeva zasniva na primeni mernih mostova. U ovim instrumentima merni mostovi se koriste za temperaturnu kompenzaciju i za povećanje osetljivosti senzora [35].

5.2 Primeri sa rešenjima

U ovom poglavlju dati su primeri pojedinih senzora koji se često sreću u laboratorijama za električna merenja i senzora koji se često koriste. Za ilustraciju rada pojedinih senzora dati su, kad god je to bilo moguće, praktični primeri.

5.2.1 NTC termistor

Potrebno je izračunati konstante NTC termistora A , B i C i odrediti nelinearnu zavisnost otpornosti termistora od temperature u formi Steinhart-Hart (SH) jednačine. NTC termistor je postavljen na temperaturu od 0 °C, na sobnu temperaturu (25 °C) i u kipuću vodu (100 °C). Za sve tri vrednosti temperature izmerena je otpornost ommetrom (sa Kelvinovim kontaktima) od 25 kΩ, 10 kΩ i 1 kΩ.

SH jednačina je oblika:

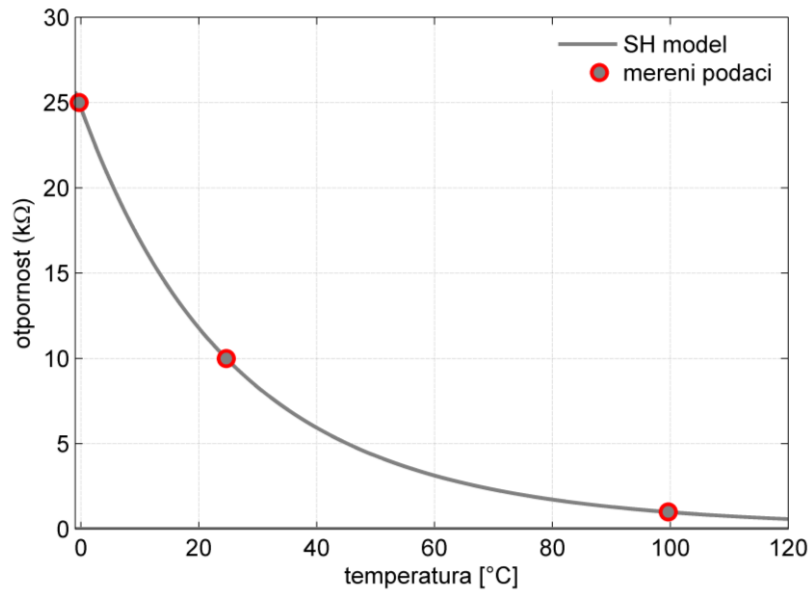
$$\frac{1}{T} = A + B \ln(R_t) + C (\ln(R_t))^3$$

Za izvršena tri merenja, jednačina se može zapisati u matricnoj formi:

$$\begin{bmatrix} 1 & \ln(25000) & (\ln(25000))^3 \\ 1 & \ln(10000) & (\ln(10000))^3 \\ 1 & \ln(1000) & (\ln(1000))^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \pi r^2$$

Rešavanje prethodne matricne jednačine (odnosno sistema od tri jednačine sa tri nepoznate), dobija se da su: $A = 1.17 \times 10^{-3}$, $B = 1.95 \times 10^{-4}$ i $C = 5.00 \times 10^{-7}$.

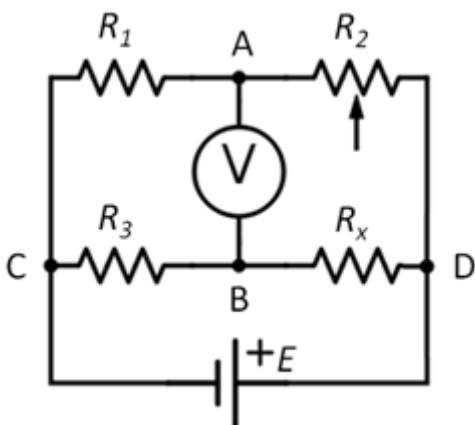
Na osnovu ovako određenog modela, moguće je proceniti nelinearnu zavisnost otpornosti R_t od temperature T . Ova zavisnost je grafički predstavljena na slici 78 za opseg temperatura od 0 °C do 120 °C.



Sl. 78, Zavisnost otpornosti NTC termistora od temperature. Na grafiku su naznačene merne tačke u eksperimentu.

5.2.2 PTC termistor

Na slici 79 je dat neuravnotežen Vitstonov most koji se koristi za merenje nepoznate temperature T primenom PTC termistora.



Sl. 79, Vitstonov most za merenje nepoznate otpornosti R_x .

R_x je temperaturno osetljivi (PTC) otpornik čija se promena otpornosti ispituje $R_x = R + \Delta R$, a R_2 je potenciometar koji služi za uravnoteženje mosta. Ako su: $R_1 = R_3 = R = 10 \text{ k}\Omega$, $E = 5 \text{ V}$ i maksimalna vrednost potenciometra je $R_{2max} = 30 \text{ k}\Omega$:

1. Nacrtati zavisnost napona u_{AB} u funkciji od ΔR , ako je $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$.
2. Ako je temperaturna zavisnost PTC otpornika data i ako su $R_0 = 2 \text{ k}\Omega$ i $T_0 = 300 \text{ K}$, izračunati maksimalnu promenu temperature koju je moguće izmeriti ovom metodom.

Temperaturna zavisnost PTC otpornika je data sledećom relacijom:

$$\Delta R = R_0 e^{\frac{\Delta T}{T_0}}$$

Napon između tačaka A i B na slici 79 je jednak:

$$U_{AB} = U_{AD} + U_{DB}$$

$$U_{AB} = U_{AD} - U_{BD}$$

$$U_{AB} = I_2 R_2 - I_x R_x$$

Za struje u granama u kojima se nalaze otpornici R_x i R_2 i koje prolaze kroz grane CBD i CAD (slika 79), respektivno važe sledeće relacije:

$$I_x = \frac{E}{R_x + R_3}$$

$$I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Sada se izraz za napon U_{AB} , može napisati kao:

$$U_{AB} = E \frac{R_x}{R_x + R_3} - E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_{AB} = E \left(\frac{R + \Delta R}{2R + \Delta R} - \frac{2}{3} \right)$$

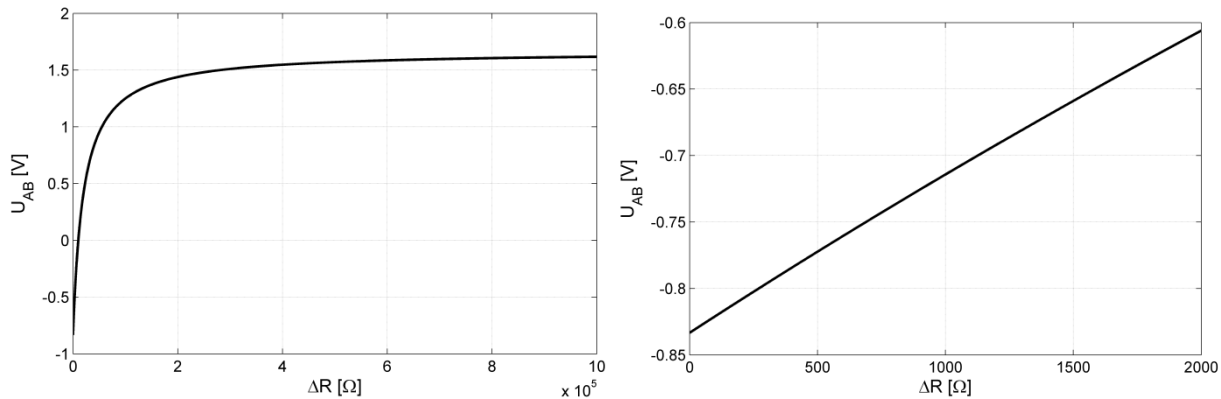
Poslednja relacija određuje zavisnost napona U_{AB} od promene otpornosti ΔR , pa izraz za taj napon kada se zamene brojne vrednosti za otpornosti postaje (u V):

$$U_{AB}(\Delta R) = 5 \left(\frac{10 + \Delta R}{20 + \Delta R} - \frac{2}{3} \right)$$

Ova zavisnost je prikazana na slici 80. Primiti na slici 80 da je za manji opseg promene otpornosti, karakteristika termistora (zavisnost napona od promene otpornosti) skoro linearna (desni panel). Ovo je veoma poželjno svojstvo senzora, jer omogućava računarsku jednostavnost u dolaženju do rešenja i

znatno pojednostavljuje matematički model senzora. Sa druge strane, ovakvu pogodnost je moguće koristiti samo u ograničenom opsegu.

Za računanje maksimalne promene temperature ΔT_{max} , potrebno je najpre iz ravnoteže mosta odrediti nepoznatu otpornost za najveću promenu otpornosti termistora koju je moguće izmeriti priloženim kolom i elementima u kolu.



Sl. 80, Zavisnost napona U_{AB} od promene otpornosti ΔR u granicama [0 1] M Ω na levom panelu i u granicama [0 10] k Ω na desnom panelu.

Ravnoteža Vitstonovog mosta za neku referentnu temperaturu na kojoj se nalazi termistor je data izrazom:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_x}$$

Za maksimalnu vrednost otpornosti R_2 (R_{2max}) prethodni izraz se može pisati u obliku:

$$\frac{R_1}{R_{2max}} = \frac{R_3}{R + \Delta R_{max}}$$

Iz prethodnog izraza se dobija da je $\Delta R_{max} = 20$ k Ω . Ako se iz izraza za promenu otpornosti u zavisnosti od temperature izvede izraz za temperaturu, dobija se:

$$\Delta T = T_0 \ln\left(\frac{\Delta R}{R_0}\right)$$

Kada se zamene brojne vrednosti dobija se da je maksimalna promena temperature koju je moguće izmeriti predloženom metodom $\Delta T_{max} = 690.78$ K (za ΔR_{max}).

Potrebno je primetiti da je ovom metodom moguće meriti temperaturu termistora. Međutim, nije moguće meriti apsolutnu temperature, već relativnu promenu temperature. Uobičajeno, proizvođači

daju tabelarno ili analitički vrednosti temperature kojima odgovaraju nominalne vrednosti otpornosti termistora. Ako relacija po kojoj se računa temperatura ili podatak tj. tabela nominalnih vrednosti temperature i otpornosti termistora nisu poznate, onda nije moguće merenje apsolutne temperature.

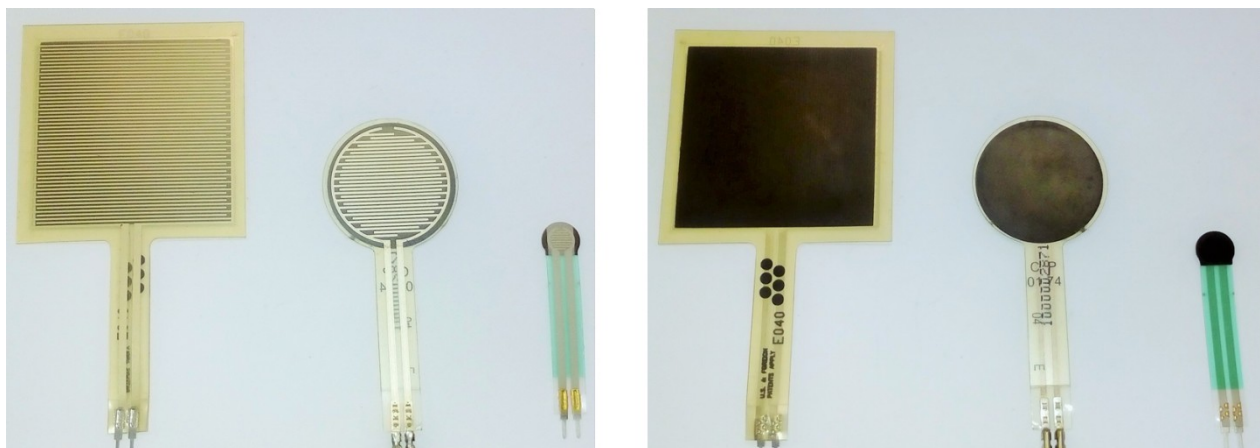
5.2.3 Rezistivni senzor sile

FSR (eng. *force-sensing resistor*) je otpornik kome se otpornost menja u zavisnosti od primenjene sile. Promenu otpornosti je moguće meriti na terminalima senzora i ona nastaje kada usled pritiska sa slojem ugljeničnog mastila (desni panel na slici 81) dođe do kratkog spoja na provodnim štampanim kontaktima (levi panel na slici 81). Senzor meri silu (F) koja je primenjena na njegovu površinu. Međutim, izmerena otpornost će zapravo zavisiti od pritiska (p) koji je primenjen na neku površinu (S):

$$p = \frac{F}{S}$$

Relacija 145

Što je S manje, to je pritisak (promena otpornosti senzora) veći. I obrnuto, što je S veće, to je pritisak manji. Postoje FSR senzori različitih dimenzija koji se koriste za različite opsege primenjenog pritiska (FSR senzori u tri dimenzije su prikazani na slici 81).

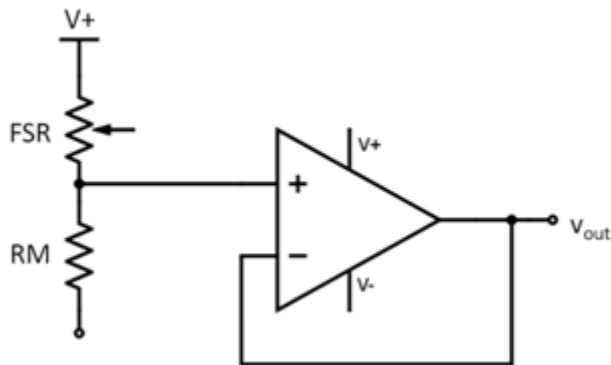


Sl. 81, Fotografija FSR senzora pritiska, [Interlink Electronics](#). Na levom panelu je prikazana "prednja" strana senzora na kojoj su vidljivi provodni kontakti (mrežasta struktura), a na desnom panelu je prikazana "zadnja" strana senzora sa ugljeničnim mastilom crne boje.

FSR senzor je moguće povezati u jednostavno kolo – naponski razdelnik kao na slici 82. Pri tome napon V_{out} se povećava sa povećanjem otpornosti odnosno sa povećanjem sile. Otpornik RM se bira tako da maksimizuje silu i da ograniči struju kroz FSR senzor (R_{FSR}). Napon koji se meri se dobija relacijom za naponski razdelnik:

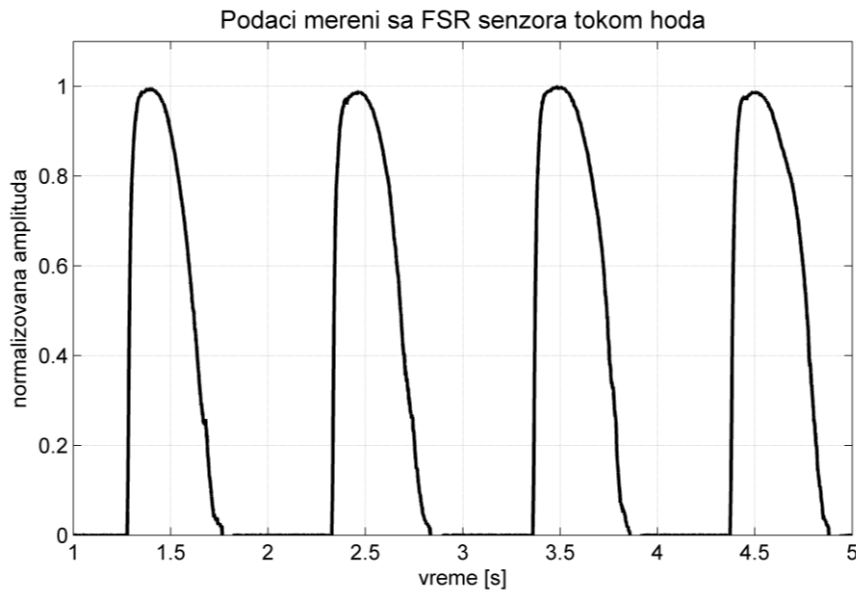
$$V_{out} = V^+ \frac{RM}{R_{FSR} + RM}$$

Relacija 146



Sl. 82, Naponski razdelnik za merenje sile FSR senzora sa operacionim pojačavačem (baferom).

Zavisnost napona merenog na FSR senzoru V_{out} je nelinearna u odnosu na silu izraženu preko gravitacionog ubrzanja g . Karakteristika FSR senzora se razlikuje u zavisnosti od RM vrednosti senzora, koje su tipično u opsegu od 3 k Ω pa do 100 k Ω .



Sl. 83, Normalizovana amplituda signala koji su mereni primenom FSR senzora za ocenu hoda. FSR senzor je postavljen na petu ispitanika. Signal je normalizovan u odnosu na maksimalnu silu tj. pritisak koji ispitanik proizvodi tokom hoda.

FSR senzori se mogu koristiti i za ocenu hoda. Naime, ako se FSR senzori stave u obuću, tada će oni prilikom hoda meriti kontakt stopala sa podlogom. Primer merenja signala sa FSR senzora koji su postavljeni u cipelu (na petu) ispitanika tokom hoda je prikazan na slici 83. Moguće je primetiti dve karakteristične faze hoda na slici 83: 1) *stance* faza odnosno faza oslonca u kojoj postoji kontakt stopala sa podlogom i 2) *swing* faza ili faza zamaha u kojoj ne postoji kontakt stopala sa podlogom (stopalo se nalazi u vazduhu). Ovi senzori se mogu koristiti i u muzičkim instrumentima kao što je predloženo u [12]. Ovi senzori imaju nelinearnu karakteristiku i njihov izlaz zavisi od prethodnog opterećenja, pa ih je potrebno na odgovarajući način modelirati i kalibrirati kako bi mogli da se koriste za merenje apsolutne sile i / ili pritiska [11]. Zbog ovih osobina, nisu široko rasprostranjeni.

5.2.4 Senzori zasnovani na promeni kapacitivnosti

Za kapacitivnost C pločastog kondenzatora važi sledeća relacija:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} \quad \text{Relacija 147}$$

U relaciji 147 ϵ_0 je dielektrična konstanta vakuma, ϵ_r je relativna dielektrična konstanta dielektrika, S je površina provodnih ploča i d je rastojanje između njih.

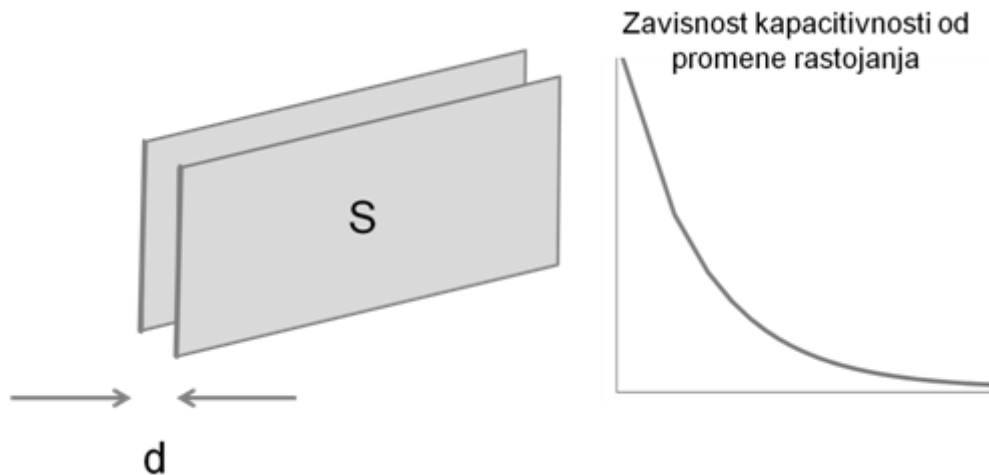
Meri se promena kapacitivnosti koja može biti rezultat:

1. promene površine S ,
2. promene rastojanja između provodnih ploča d i
3. promena dielektrika ϵ_r u relaciji 147.

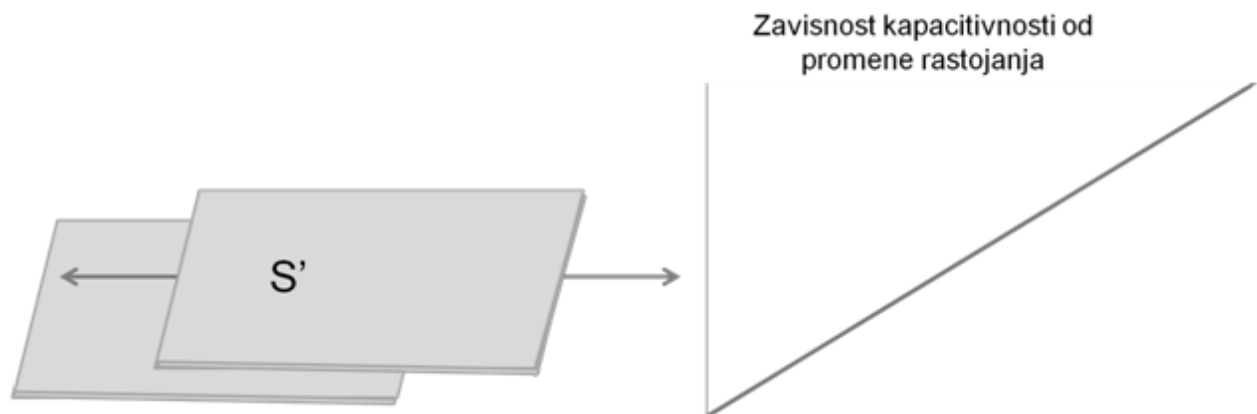
Najčešće se senzori zasnovani na promeni kapacitivnosti koriste za merenje pomeraja. [Kapacitivni senzori pomeraja](#) su bezkontaktni uređaji koji mogu da mere sa visokom rezolucijom poziciju i / ili promenu pozicije provodnika. Ako se rastojanje između pločastih provodnika d menja onda se menja i kapacitivnost C . Merenjem kapacitivnosti tj. promene kapacitivnosti moguće je izračunati promenu rastojanja. Na slici 84 je data zavisnost promene kapacitivnosti od pomeraja rastojanja d koja je nelinearna na desnom panelu, a na levom panelu je prikazan jednostavan model takvog senzora u obliku pločastog kondenzatora [4].

Detekciju pomeraja je moguće realizovati i pomeranjem provodnih ploča (levi panel na slici 85) [4]. Prednost ove metode je što je zavisnost kapacitivnosti od pomeraja linearna. Mana je što je neophodno da se prilikom pomeraja rastojanje d održava konstantnim (što nije jednostavno postići).

U upotrebi su takođe i kapacitivni senzori pomeraja sa tri i više provodnih ploča. Za merenje se koriste ili jednostavna RC kola ili C / V konvertori.



Sl. 84, Kapacitivni senzor pomeraja. Na levom panelu je prikazan jednostavan pločasti model kapacitivnog senzora, a na desnom panelu je prikazana nelinearna karakteristika kapacitivnog senzora koji se zasniva na promeni rastojanja između provodnika u pločastom kondenzatoru.



Sl. 85, Kapacitivni senzor pomeraja na levom panelu i linearna karakteristika senzora na desnom panelu (zavisnost kapacitivnosti od promene rastojanja).

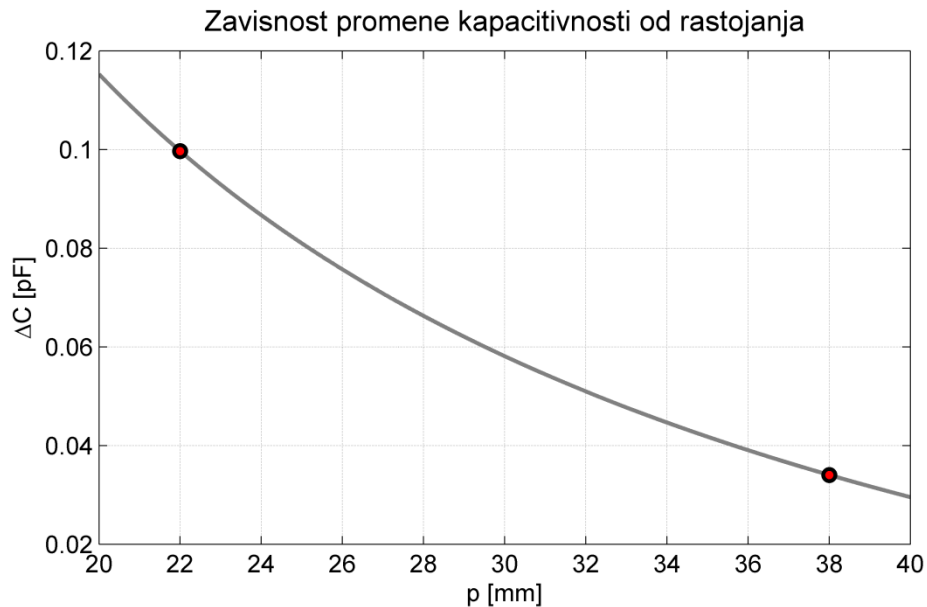
Neka je na primer dat kapacitivni senzora rastojanja i neka je potrebno primenom RC metode izmeriti promenu kapacitivnosti. Neka je primenom RC metode izmereno $\Delta t_1 = 0.08 \mu s$ i $\Delta t_2 = 0.22 \mu s$ (vreme koje je potrebno da napon na kondenzatoru sa 10% poraste na 90% od vrednosti napona napajanja) za pozicije provodnih ploča p_1 i p_2 , respektivno.

Ako je $R = 1 M\Omega$ i ako je zavisnost kapacitivnosti kondenzatora C i rastojanja data na slici 86 (podatak proizvođača), onda je moguće odrediti pomeraj objekta Δp . Poznato je da se primenom RC metode, dobija sledeći izraz za Δt :

$$\Delta t = RC \ln 9$$

$$C = \frac{\Delta t}{R \ln 9}$$

Na osnovu prethodne relacije o kapacitivnosti kondenzatora, mogu se odrediti kapacitivnost C_1 i kapacitivnost C_2 koje odgovaraju različitim pomerajima provodnih ploča kondenzatora: $C_1 = \frac{0.08 \times 10^{-6}}{10^6 \ln 9} = 0.0364 \text{ pF}$ i $C_2 = \frac{0.22 \times 10^{-6}}{10^6 \ln 9} = 0.1001 \text{ pF}$.



Sl. 86, Podatak proizvođača o zavisnosti kapacitivnosti kondenzatora (u pF) od relativnog pomeraja provodnih ploča kondenzatora (u mm).

Sa slike 86 je moguće odrediti da je za proračunate C_1 i C_2 razlika pomeraja jednaka $\Delta p = p_2 - p_1 = 38 - 22 = 16 \text{ mm}$. Prema tome, pomeraj koji je izmeren u ovom zadatku odgovara rastojanju od 16 mm.

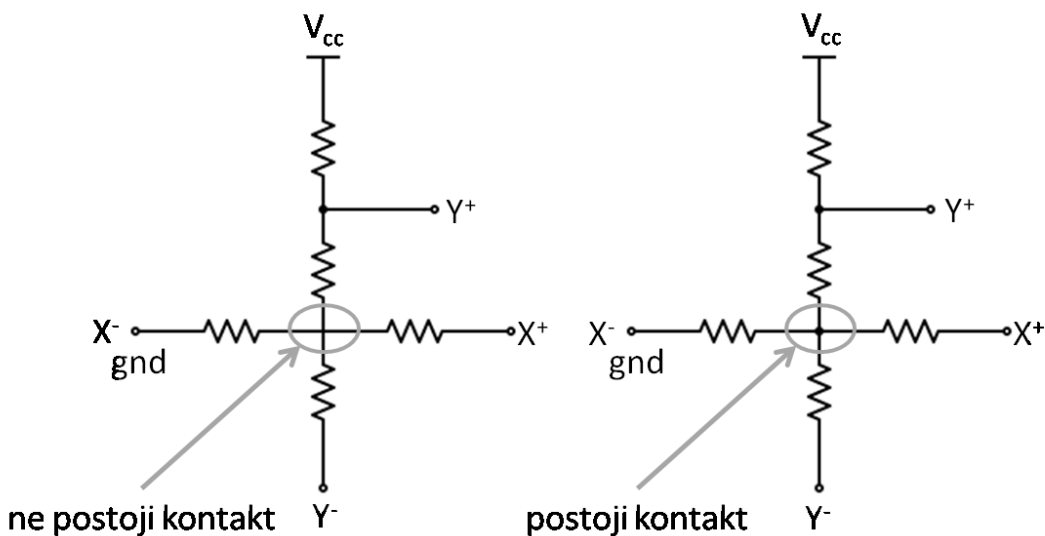
U praksi se vrlo često koriste kapacitivni i rezistivni senzori. Jedan od primera primene ovih senzora u svakodnevnom okruženju je u ekranima osetljivim na dodir. Postoje i rezistivni i kapacitivni ekrani osetljivi na dodir čiji se rad zasniva na principima koji su ranije opisani.

5.2.5 Rezistivni ekran osetljiv na dodir

U ovom poglavlju će biti objašen princip rada rezistivnog ekrana osetljivog na dodir (eng. [touch screen](#)). Ekran osetljiv na promenu otpornosti sastoji se iz dva providna sloja koji su napravljeni od provodnih

materijala. Kada postoji pritisak na određenom delu ekrana, gornji sloj ostvaruje kontakt sa donjim slojem [1]. Ako se dovede napajanje u jednom od provodnih slojeva, dolazi do transformacije kola u razdelnik napona (kao što je prikazano na slici 87). Princip rada ovih ekrana i njihovog rezistivnog svojstva biće objašnjen na pojednostavljenom primeru sa jednim kontaktom koji je prikazan na slici 87.

Ovaj ekran radi na principu mehaničkog prekidača, jer se usled kontakta sa ekranom ostvaruje kontakt dva provodnika i dolazi do transformacije kola. Usled kontakta, kolo postaje naponski razdelnik (slika 87). Napajanje se dovodi u jednom sloju u y pravcu (u pravcu ordinate), a potom u x pravcu (u pravcu apscise) kako bi se očitale (x, y) koordinate mesta dodira.



Sl. 87, Detekcija dodira kod rezistivnih ekrana osetljivih na dodir. Na levom panelu prikazana je jednostavna konstrukcija ekrana kada kontakt ne postoji, a na desnom panelu naponski razdelnik kada postoji kontakt. Sa X i Y su objašnjeni pravci ekrana tj. koordinatni sistem u kome se očitava mesto kontakta. Ilustracija je prilagođena opisu u [1].

Napajanje V_{cc} se dovodi u tačku Y^+ preko otpornika. Uzemljenje napajanja se dovodi u tačku X^- . Otpornost otpornika koji je povezan sa V_{cc} preko Y^+ je obično par stotina Ω i uobičajeno je znatno veći od ostalih otpornosti u kolu. Kada nema kontakta, tačka Y^+ je povezana sa tačkom Y^- , a kada ima kontakta, tačka Y^+ je povezana sa uzemljenjem (X^-) kako je označeno na slici 88.

Detekcija dodira kod rezistivnih ekrana se najčešće ostvaruje metodom sa 4 kontakta. U ovoj metodi se koordinate (x, y) mesta kontakta se određuju u 2 koraka nakon što je došlo do kontakta za svaku od koordinata.

Za određivanje koordinate y procedura je sledeća [1]:

1. Napajanje (V_{Drive}) se dovodi na Y^+ , uzemljenje na Y^- i meri se napon u X^+ .

2. Odnos merenog napona i napona napajanja odgovara odnosu y koordinate i visine ekrana h (od eng. *height*).

Na sličan način se računa i koordinata x prema sledešoj proceduri [1]:

1. Napajanje (V_{Drive}) se dovodi na X^+ , a uzemljenje na X^- i meri se napon Y^+ .
2. Odnos merenog napona i napona napajanja odgovara odnosu x koordinate i širine ekrana w (od eng. *width*).

Kada postoji kontakt, meri se napon V_x^+ kao na slici 88 i očitava se vrednost y koordinate. Dobijaju se vrednosti koje su određene sledećim relacijama:

$$V_x^+ = V_{cc} \frac{R_{Y^-}}{R_Y}$$

$$y = h \frac{V_x^+}{V_{cc}}$$

Za merenje x koordinate, meri se vrednost napona V_y^+ kao na slici 88, prema sledećim relacijama:

$$V_y^+ = V_{cc} \frac{R_{X^-}}{R_X}$$

$$x = w \frac{V_y^+}{V_{cc}}$$

U prethodnim relacijama sa R_x i sa R_y , označene su ukupne otpornosti u ovim pravcima kao na slici 89. Osim realizacije sa 4 kontakta, moguće je realizovati i detekciju kontakta i sa 5 kontakta. Prednosti ovakvog sistema su [1]:

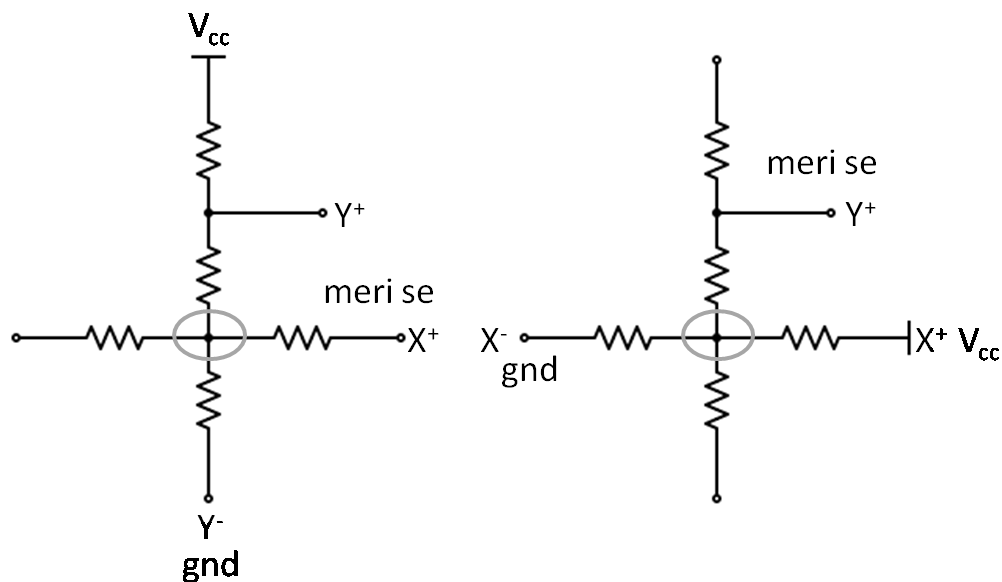
1. može se detektovati kontakt sa raznim objektima (prst, rukavica, olovka i dr.) i može se odrediti pritisak,
2. relativno jeftini senzori,
3. potrebne su relativno male snage napajanja i
4. otporni su na vlagu, prašinu, masnoće.

Mane ovog sistema su:

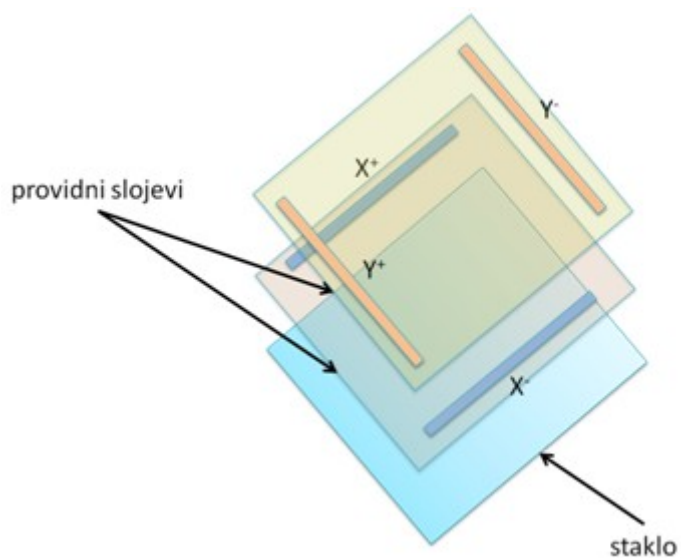
1. manji je kvalitet slike u poređenju sa drugim *touchscreen* tehnologijama i
2. moguća su oštećenja površine senzora.

Upravo zbog pobrojanih mana ovi ekrani nisu široko rasprostranjeni i njih su u velikoj meri zamenili u današnjim uređajima kapacitivni ekrani osetljivi na dodir.

Fizička konstrukcija ovih ekrana se postiže konstrukcijom u tri sloja, kao što je prikazano na slici 89. Prvi sloj je staklo ekrana, a potom se na njemu nalaze dva providna sloja na čijim krajevima su postavljeni otpornici u četiri različita pravca: Y^+ , Y^- , X^+ i X^- [1].



Sl. 88, Princip rada rezistivnog ekrana osetljivog na dodir sa 4 kontakta. Na levom panelu se u pravcu Y koordinate dovodi napajanje, a napon se očitava u pravcu X koordinate za merenje položaja kontakta u X pravcu. Na desnom panelu je prikazan primer merenja koordinate u Y pravcu. Ilustracija je prilagođena primeru u [1].



Sl. 89, Konstruisanje ekrana osetljivog na dodir sa 4 kontakta, (X^+ , X^- , Y^+ , Y^-). Ilustracija je prilagođena opisu u [1]. Provodni slojevi / kontakti su označeni na slici na providnim slojevima koji se nalaze iznad stakla.

5.2.6 Kapacitivni ekrani osetljivi na dodir

Široko je rasprostranjena primena kapacitivnih ekrana osetljivih na dodir. Postoji više načina kako se mogu realizovati kapacitivni ekrani osetljivi na dodir:

1. površinska kapacitivnost i
2. projektovana kapacitivnost:
 - a. *self capacitance* i
 - b. *mutual capacitance*.

Ukratko je opisan rad ovih ekrana u sledećem tekstu.

5.2.6.1 Površinska kapacitivnost

Stakleni ekran je prekriven provodnim slojem. Napajanje se dovodi na sva 4 ugla ekrana i rezultat toga je formiranje uniformnog elektrostatičkog polja. Merenjem struje u svakom od uglova ekrana koja nastaje kao rezultat kontakta sa kapacitivno provodnim prstom korisnika (jedan provodnik je provodni sloj ekrana, a drugi je prst) kontroler određuje poziciju dodira.

Kapacitivnost se najčešće meri RC metodom (meri se vreme punjenja kondenzatora). Ova vrsta ekrana radi po principu elektro-kapacitivne detekcije, jer usled dodira dolazi do promene kapacitivnosti C u kolu. Kapacitivnost koja je rezultat kontakta prsta sa ekranom je reda od 0.5 pF do 20 pF.

Mana ovih sistema je što često može doći do greške u određivanju lokacije kontakta usled nehomogenosti provodne površine.

5.2.6.2 Projektovana kapacitivnost - *self capacitance*

Ekran osetljiv na dodir koji se zasniva na projektovanoj kapacitivnosti se sastoji iz niza kondenzatora. Kada postoji kontakt – prst će biti u kontaktu sa više kondenzatora u X pravcu i sa više kondenzatora u Y pravcu. Ovakva realizacija omogućava precizno detektovanje pozicije kontakta, na osnovu merenja redne kapacitivnosti.

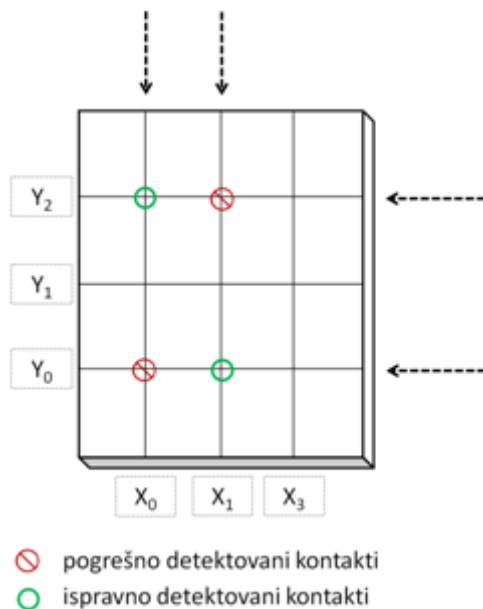
5.2.6.3 Projektovana kapacitivnost - mutual capacitance

Ako bi se metoda *self-capacitance* koristila za detektovanje više kontakta istovremeno, došlo bi do greške usled pogrešno identifikovanih mesta kontakta (eng. *ghost point* na slici 90). Sa ciljem unapređenja ove metode i omogućavanjem detekcije više istovremenih kontakta razvijena je metoda projektovane kapacitivnosti za detekciju kontakta (eng. *mutual capacitance*) na ekranu osetljivom na dodir.

Kod tehnike projektovane kapacitivnosti meri se kapacitivnost između dve elektrode [43]. Obzirom da relativno mala struja protiče kroz prst (usled provodnih osobina prsta i usled činjenice da se vazduh ponaša kao dielektrik), dolazi do smanjenja kapacitivnosti između dve elektrode odnosno deo struje prolazi ka prstu, a deo ka drugoj elektrodi kao što je to prikazano na slici 91. Prilikom kontakta prst / panel – meri se promena kapacitivnosti na samom mestu kontakta [43].

Prednosti kapacitivnih ekrana osetljivih na dodir su:

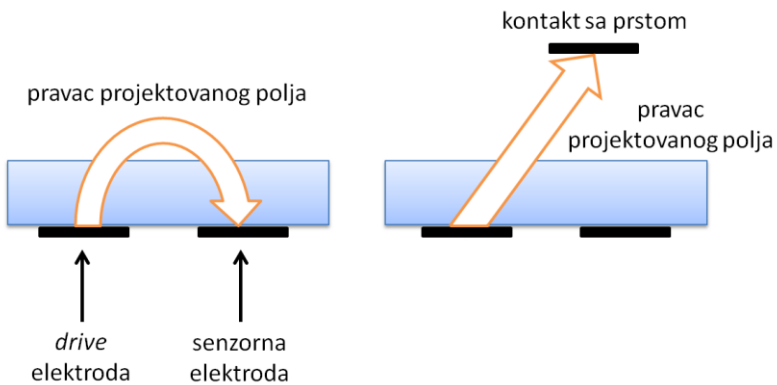
1. odličan kvalitet slike,
2. izdržljiv ekran,
3. otpornost na tečnosti i prljavštine i
4. moguće je detektovati lokacije više kontakta istovremeno.



Sl. 90, Pogrešno i ispravno detektovani kontakti kod *self-capacitance* metode za projektovanje ekrana osetljivih na dodir.

Mane ovog sistema su:

1. mora se vršiti kontakt prstom ili nekim drugim elementom sa kapacitivnim osobinama i
2. osetljivost na EMI (eng. *electromagnetic interference*) i RFI (eng. *radio-frequency interference*).



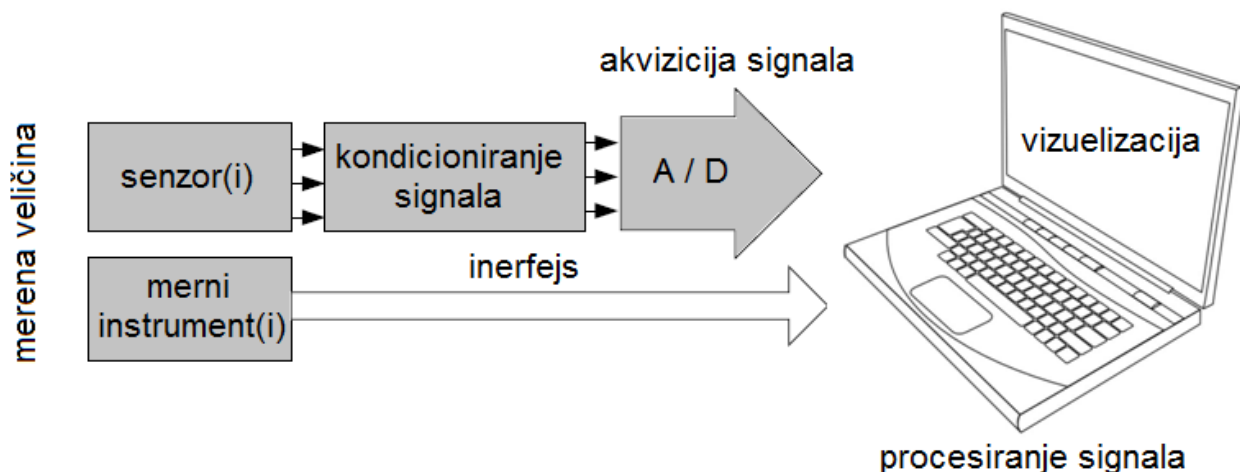
Sl. 91, *Mutual capacitance* metoda koja se koristi za detekciju većeg broja istovremenih kontakata. Na levom panelu je prikazan pravic projektovanog polja koje stvara struja koja prolazi kroz dve elektrode (*drive* elektrode na koju se dovodi napajanje i senzorne elektrode na kojoj se vrši merenje) kada nema kontakta, a na desnom panelu je prikazan pravic prostiranja polja kada postoji kontakt.

6 MERNI INSTRUMENTI ZASNOVANI NA PRIMENI RAČUNARA

Merni [eksperiment](#) se obavlja sa ciljem da se eksperimentalna pretpostavka usvoji ili odbaci ili sa ciljem određivanja kvantitativne karakteristike neke električne (u opštem slučaju fizičke) veličine. Uobičajena procedura u mernim eksperimentima uključuje sledeće korake:

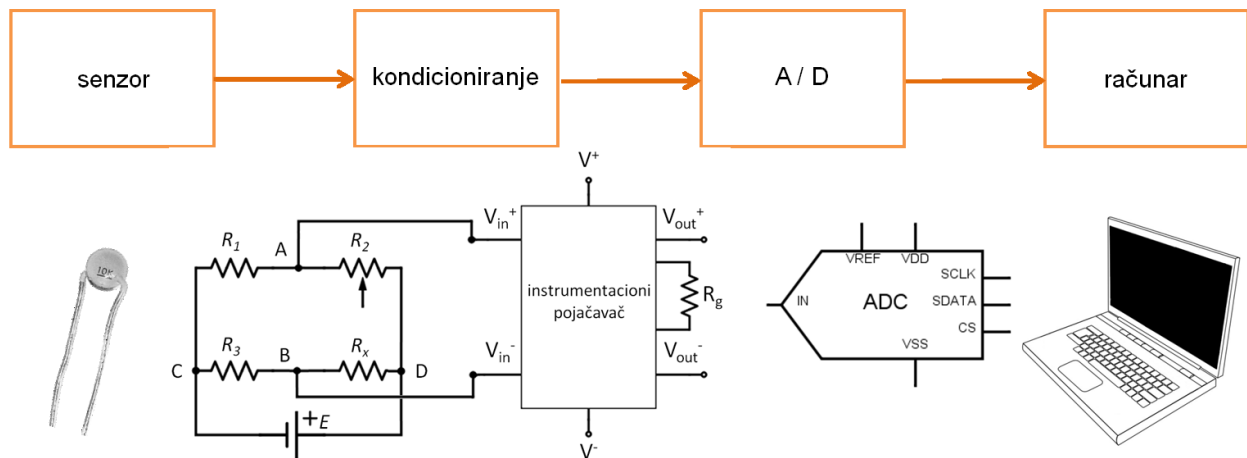
1. postavka električnog (u opštem slučaju fizičkog) i/ili matematičkog modela posmatranog procesa,
2. konverzija merene vrednosti u električnu veličinu (u slučaju kada se ne meri električna veličina direktno),
3. kondicioniranje signala (na primer: pojačanje, filtriranje),
4. akvizicija podataka (multipleksiranje podataka i A / D (eng. *analog to digital*) konverzija, prenos signala),
5. procesiranje signala (na primer: određivanje parametra od interesa, određivanje merne nesigurnosti, određivanje Furijeove transformacije) i
6. vizuelizacija i/ili prenos podataka (*online* ili *offline*).

Većina ovih operacija može biti automatizovana uz pomoć računara. Primer mernog sistema dat je na slici 92 sa osnovnim delovima (senzor, kola za kondicioniranje signala, akvizicija signala, interfejs i računar na kome se vrši vizuelizacija signala i obrada signala).

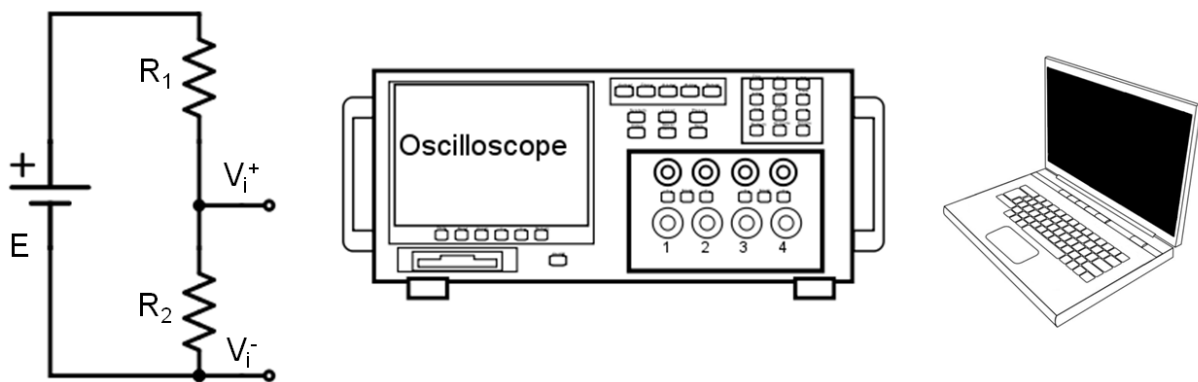


Sl. 92, Blok dijagram primera mernog sistema koji se zasniva na primeni računara je prikazan na slici. Umesto projektovanog sistema (senzor, kondicioniranje, A / D), može se koristiti i merni instrument koji je povezan direktno sa računarom (kao na slici dole). Umesto računara, moguće je koristiti mikrokontroler itd.

Pod mernim sistemom koji se zasniva na primeni računara, podrazumeva se skup alata, metoda i operacija (hardver i softver) koji su projektovani tako da mogu da izmere fizičku veličinu. Na primer, ako je potrebno izmeriti temperaturu korišćenjem PTC termistora i ako je pri tom na raspolaganju odgovarajuća akviziciona kartica (A / D kartica) koja omogućava digitalizaciju signala, onda je moguće primenom računara izmeriti signal i prikazati ga na računaru. Merni sistem koji se koristi za ovo merenje je prikazan na slici 93.



Sl. 93, Primer mernog sistema koji koristi PTC termistor (senzor ili u opštem slučaju pretvarač) povezan u Vitstonov merni most čiji se izlaz vodi na instrumentacioni pojačavač (električna kola za kondicioniranje signala), potom na koji se vodi na A / D (ADC - Analog to Digital Converter) karticu koja je povezana sa računarem.



Sl. 94, Primer mernog sistema koji se koristi za merenje napona primenom osciloskopa koji je serijskom vezom povezan sa računarem. Na računaru je moguće prikazati signal i projektovati programski kod koji bi omogućio računanje ukupne merne nesigurnosti za merenje napona.

Ako je na primer potrebno izmeriti napon digitalnim osciloskopom TDS220 (Tektronix), snimiti napon na računaru i izračunati mernu nesigurnost tipa A i tipa B, moguće je koristiti merni sistem prikazan na slici 94. U primeru sa slike 93 prikazano je kako je moguće realizovati merni sistem zasnovan na primeni računara kada je na raspolaganju senzor i odgovarajuća kola za kondicioniranje i digitalizaciju signala. Međutim, na slici 94 je prikazan primer povezivanja mernog instrumenta sa računarem i merenje signala.

Generalizovana šema (slika 92) obuhvata oba slučaja: na gornjem panelu je prikazan merni sistem koji sadrži kola za kondicioniranje kao na slici 93, a na donjem panelu je prikazan primer koji omogućava povezivanje mernog instrumenta sa računarem kao na slici 94.

6.1 Električni model

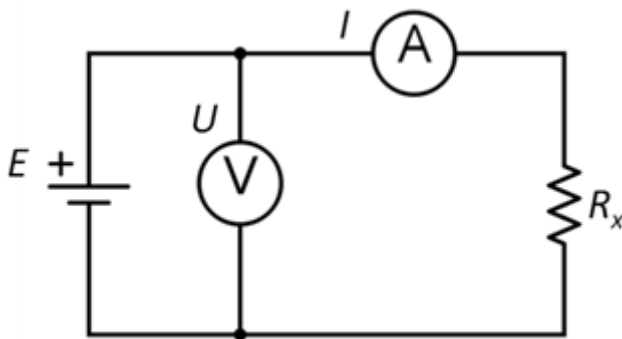
Kako bi se izmerila neka električna veličina, posebno u slučaju kada je merenje nepoznate veličine y indirektno i zavisi od direktnog merenja x_1, x_2, \dots, x_n (u opštem slučaju postoji n veličina koje su izmerene primenom direktne metode). Ova relacija se može zapisati kao:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{Relacija 148}$$

Relacija 148 (funkcija $f(\cdot)$) predstavlja električni model koji je potrebno odrediti za merenje nepoznate veličine y . Na primer ako se meri nepoznata otpornost korišćenjem strujne veze, onda se prema električnom modelu (prikazan na slici 95) može koristiti sledeća funkcija za računanje nepoznate otpornosti:

$$R_x = f(U, I) = \frac{U}{I} \quad \text{Relacija 149}$$

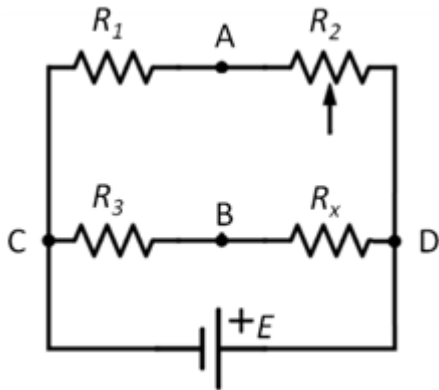
U ovom slučaju direktno merene veličine su napon na krajevima otpornika U i struja koja protiče kroz otpornik I . Električni model koji je predstavljen relacijom 149 je dobijen na osnovu Omovog zakona.



Sl. 95, Strujna veza za merenje nepoznate otpornosti R_x .

6.1.1 Primer određivanja električnog modela - PTC termistor

Za potrebe merenja temperature primenom PTC termistora otpornosti R_x u sistemu zasnovanom na primeni računara (kao na slici 93), koristi se Vitstonov most prikazan na slici 96.



Sl. 96, Vitstonov most za merenje nepoznate otpornosti PTC termistora R_x .

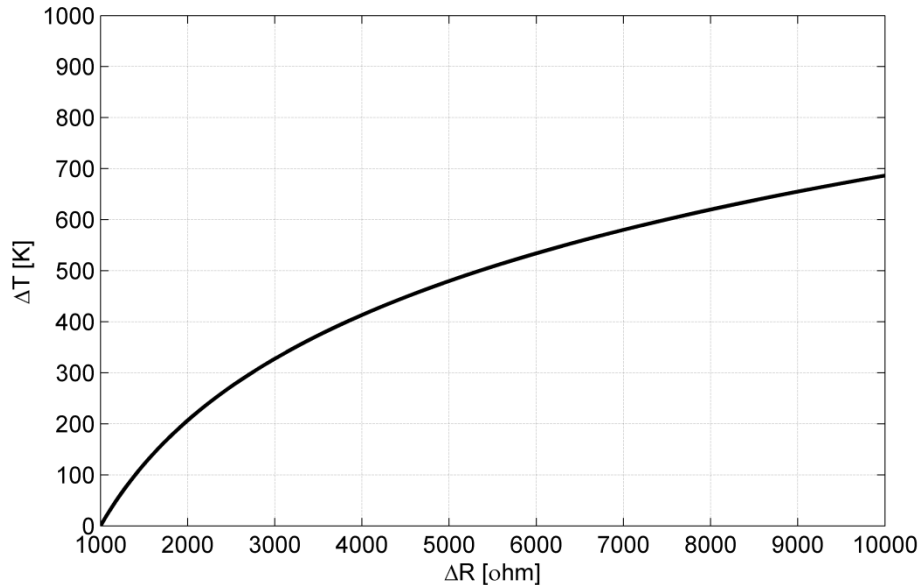
Vitstonov most u ovom slučaju služi za merenje nepoznate otpornosti R_x termistora. Meri se napon u grani AB i kada je most u ravnoteži napon $U_{AB} \approx 0$. Na osnovu ravnoteže mosta, moguće je (poznavanjem otpornosti otpornika R_1 , R_2 i R_3) odrediti nepoznatu otpornost R_x :

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad \text{Relacija 150}$$

Relacija za računanje promene otpornosti PTC termistora ΔR u zavisnosti od promene temperature ΔT je oblika:

$$\Delta R = R_0 e^{\frac{\Delta T}{T_0}}$$
$$\ln \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta T}{T_0}$$
$$\Delta T = T_0 \ln \frac{\Delta R}{R}$$

U prethodnim relacijama sa $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$ je obeležena nominalna otpornost PTC termistora koja je dobijena merenjem otpornosti termistora za temperaturu $T_0 = 298.12 \text{ K}$ (sobna temperatura). Zavisnost promene temperature termistora od otpornosti termistora je prikazana na slici 97 za promene otpornosti od $1 \text{ k}\Omega$ do $10 \text{ k}\Omega$.



Sl. 97, Zavisnost promene temperature termistora ΔT od promene otpornosti termistora ΔR za sobnu temperaturu $T_0 = 298.12$ K i otpornik nominalne otpornosti $R_{nom} = 1$ k Ω .

6.2 Kola za kondicioniranje signala

[Kondicioniranje signala](#) se obavlja sa ciljem pripreme analognog signala za sledeću fazu merenja i obuhvata niz tehnika, metoda i kola iz analogne elektronike za manipulaciju analognim signalom. Kondicioniranje signala može da uključi i A / D konverziju signala. Uobičajeno se kondicioniranje signala realizuje sa ciljem pojačanja, filtriranja, izolacije i drugih procesa.

Prilikom projektovanja mernih sistema moguće je za potrebe odgovarajućih aplikacija realizovati elektronska kola za kondicioniranje signala u više faza. Na primer, za potrebe merenja signala relativno malih amplituda (~ 1 mV) poželjno je da se jedan pojačavački stepen postavi što je moguće bliže mernom mestu kako bi se prenos signala do ostalih delova mernog sistema obavio sa što manjom distorzijom (kako bi se smanjio uticaj šuma i spoljašnjih faktora).

6.2.1 Pojačavači

Većina pasivnih senzora proizvodi signale koji su relativno malih amplituda (u odnosu na šum). To su ili naponski signali malih amplituda (μ V) ili strujni signali malih amplituda (pA). Kako je za većinu A / D

konvertora predviđeno da ulazni signal bude većih amplituda (za naponske signale reda V ili za strujne signale reda mA), to je neophodno pojačati ulazni signal (napon se pojačava i do 10 k puta, a struju se pojačava i do 1 M puta).

Pojačavač je uređaj koji omogućava pojačanje snage signala koristeći energiju napajanja. Generalno, svrha **pojačavača** nije samo pojačanje ulaznog signala već i prilagođenje ulazne impedanse, podešavanje **SNR** (eng. *signal to noise ratio*), filtriranje signala i dr. Pojačanje signala se može izraziti i u dB (u decibelima). **Decibel** je logaritamska jedinica koja služi da se izrazi relativan odnos dve fizičke veličine. Najčešće se preko decibela predstavlja snaga ili intenzitet, ali i pojačanje pojačavača. Ako se pojačanje G_{dB} izražava u decibelima za odnos neka dva napona (V_{out} je amplituda napona na izlazu iz pojačavača, a V_{in} je amplituda napona na ulazu pojačavača), onda važi relacija:

$$G_{dB} = 20 \log_{10} \frac{V_{out}}{V_{in}} \quad \text{Relacija 151}$$

Nekada se opsezi u izvorima napajanja izražavaju u decibelima. Na primer, ako naponski generator za $G_{dB} = 0$ dB na izlazu daje napon u opsegu [0 10] V, tada isti generator za $G_{dB} = 20$ dB na izlazu daje napajanje u opsegu [0 0.1] V. Pojačanje pojačavača se nekad i obeležava kao odnos jedinica. Na primer, ako za pojačavač važi da je pojačanje $1 \mu\text{V} / \text{V}$ (jedan mikrovolt po voltu, odnosno $1 \mu\text{V}$ se preslikava u 1 V) tada je pojačanje jednako = 1000 puta.

Ako se preko decibela izražava odnos snaga, tada se koristi sledeća formula:

$$L_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P}{P_0} \quad \text{Relacija 152}$$

U prethodnoj formuli (relacija 152) sa L_{dB} je označen odnos merene snage P i referentne snage P_0 . Iz relacije 152 za relativni odnos snaga jednostavno se može dobiti izraz za pojačanje (odnos napona). Za snagu električnog kola P (npr. na otporniku R), važi:

$$P = VI$$

$$P = \frac{V^2}{R}$$

U prethodnim relacija sa V je označen napon na otporniku, a sa I je označena struja koja prolazi kroz otpornik, pa je sada pojačanje u decibelima:

$$G_{dB} = 10 \log_{10} \frac{\frac{V^2}{R}}{\frac{V_0^2}{R}}$$

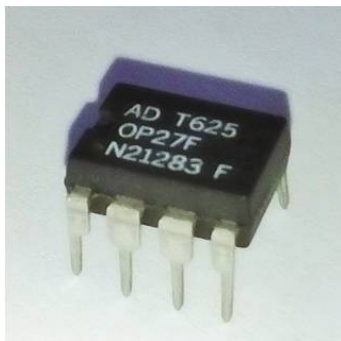
U prethodnom izrazu sa V_0 je označen referentni napon i izraz se jednostavno svodi na:

$$G_{dB} = 20 \log_{10} \frac{V}{V_0} \quad \text{Relacija 153}$$

Relacija 153 odgovara ranijoj relaciji za odnos amplituda signala na ulazu i na izlazu pojačavača (relacija 151). Prethodni izraz važi i za opšti slučaj u kada se u električnim kolima umesto snage na otporniku posmatra snaga impedanse (realnog elementa koji ima osobine pasivnih elemenata otpornosti, kapacitivnosti i induktivnosti).

6.2.1.1 Operacioni pojačavač

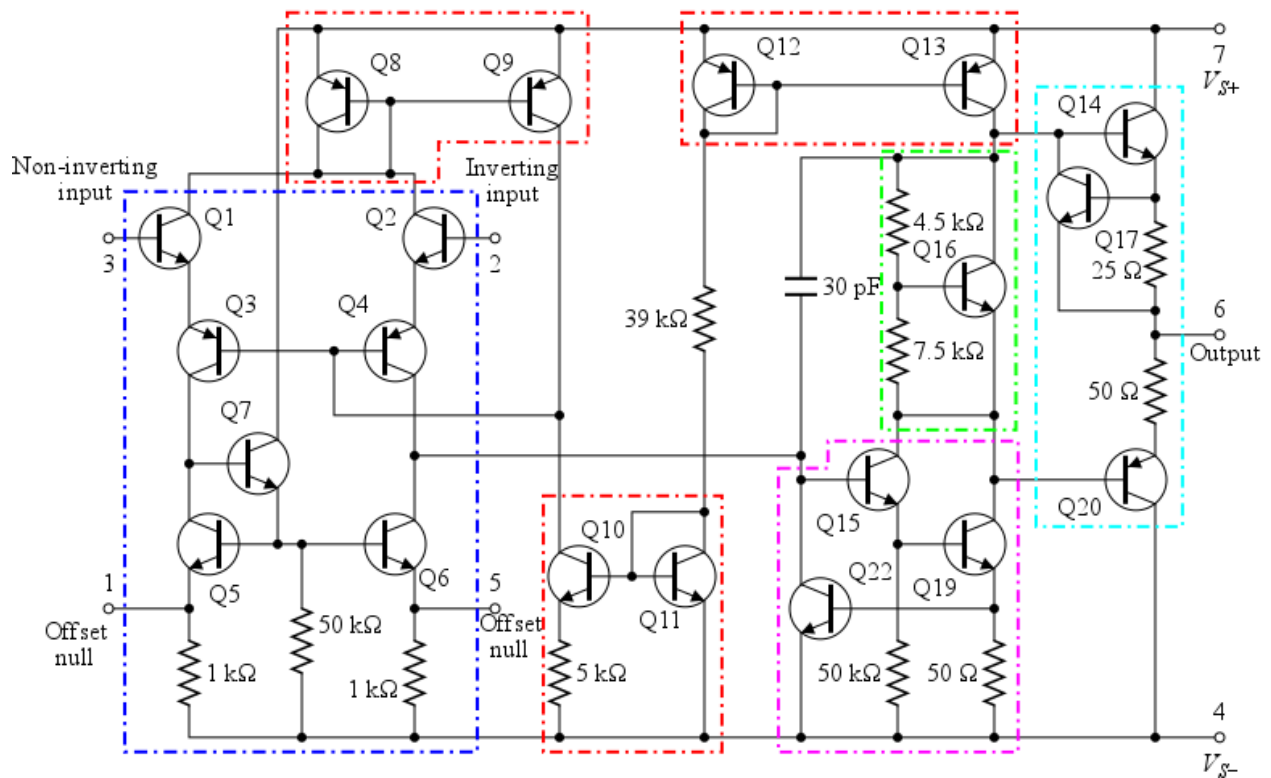
Osnovni element svih pojačavačkih kola je [operacioni pojačavač](#). Primer integrisanog čipa operacionog pojačavača OP27 ([Analog Devices](#)) je prikazan na slici 98. Integrisano kolo operacionog pojačavača može da sadrži stotine tranzistora, otpornika i kondenzatora. Pojednostavljen šematski prikaz jednog operacionog pojačavača sa osnovnim delovima je prikazan na slici 99.



Sl. 98, Fotografija operacionog pojačavača OP27, [Analog devices](#).

Neke karakteristike idealnog operacionog pojačavača su:

1. beskonačna ulazna otpornost (struja je 0 na ulazu),
2. nulta izlazna otpornost (ponaša se kao idealan naponski generator),
3. beskonačno pojačanje u otvorenoj petlji,
4. beskonačna širina propusnog opsega,
5. beskonačna brzina odziva,
6. beskonačan faktor potiskivanja CMRR (eng. *common mode rejection ratio*) i
7. ima 2 ulaza: invertujući i neinvertujući.



Sl. 99, Blok šema operacionog pojačavača 741. Sekcije operacionog pojačavača su uokvirene: strujna ogledala, diferencijalni pojačavači, pojačanja klase A, šifter naponskog nivoa i izlazni stepen. By Daniel Braun - redrawn png file (from User: Omegatron), Page# 4 of datasheet, CC BY 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2205381>.

Realni pojačavači nemaju gorepomenute karakteristike. Najčešće se realne karakteristike aproksimiraju idealnim. Pojačavači u zavisnosti od načina vezivanja mogu da rade u različitim režimima. Jedan režim rada je kada operacioni pojačavač služi i kao invertor (levi panel na slici 100). Ako je struja na ulazu 0 (beskonačna ulazna otpornost), tada je struja kroz R_1 i R_2 ista:

$$\frac{v_u}{R_1} = -\frac{v_i}{R_2}$$

A izlazni napon operacionog pojačavača koji ima ulogu invertovanja v_i je tada jednak:

$$v_i = -\frac{R_2}{R_1} v_u \quad \text{Relacija 154}$$

Za ulazni napon neinvertujućeg operacionog pojačavača (desni panel na slici 100) važi sledeća relacija:

$$v_u = v^+ = v^-$$

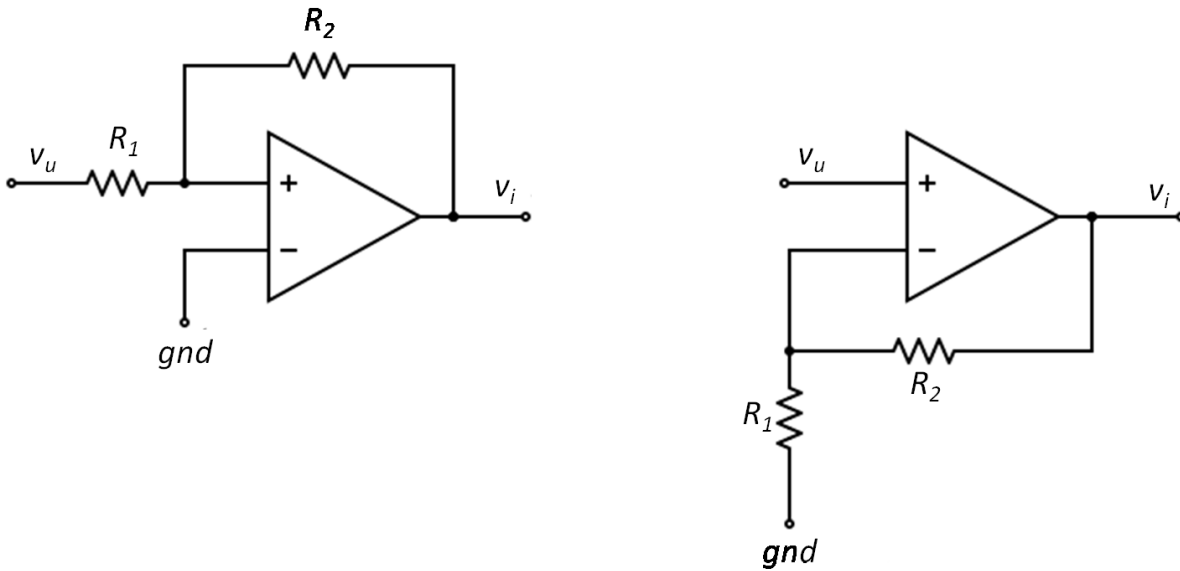
Za ovaj pojačavač takođe važi da je struja kroz grane u kojima se nalaze otpornici R_1 i R_2 ista, pa važi:

$$\frac{v_i - v^-}{R_2} = \frac{v^-}{R_2}$$

$$v_i = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) v_u$$

Relacija 155

U relaciji 155 je prikazano kako izlazni stepen neinvertujućeg operacionog pojačavača je funkcija otpornosti R_1 i R_2 . Odabirom odnosa $\frac{R_1}{R_2}$ moguće je podesiti željeno pojačanje ulaznog signala v_u .



Sl. 100, Invertujući operacioni pojačavač (levi panel) i neinvertujući operacioni pojačavač (desni panel).

Operacioni pojačavač koji ima jedinično pojačanje služi kao bafer u elektronskim kolima. S obzirom da je kod ovog pojačavača, pojačanje jedinično, a ulazna impedansa velika najčešće se koristi kao razdvojni stepen i sprečava uticaj opterećenja potrošača na izvor signala.

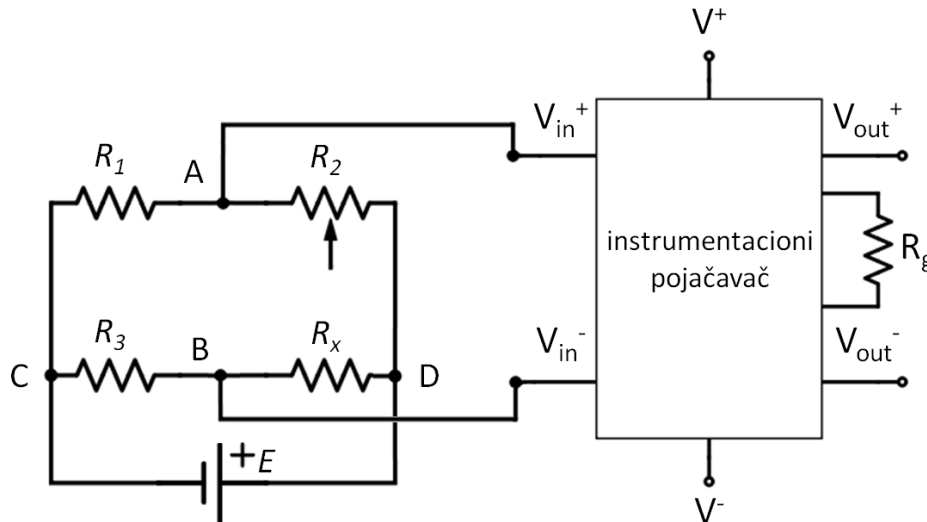
6.2.1.2 Instrumentacioni pojačavač

Osnovna razlika između idealnog operacionog i idealnog instrumentacionog pojačavača je ta što instrumentacioni pojačavač ima konačno pojačanje G (određeno odabirom otpornika R_G od eng. *gain*) na sledeći način:

$$G = 1 + \frac{50 \text{ k}\Omega}{R_G}$$

Relacija 156

Takođe, razlika je i u tome što postoji mogućnost da se instrumentacioni pojačavač koristi za pojačanje razlike dva napona. Zbog te osobine u većini slučajeva je poželjno koristiti instrumentacioni pojačavač na mestu indikatora ravnoteže mosta kao što je to prikazano na slici 101.



Sl. 101, Primena instrumentacionog pojačavača na izlazu iz Vitstonovog mernog mosta - pojačanje promene napona na izlazu iz mernog mosta.

Na primer, u slučaju merenja temperature PTC termistorom pomoću Vitstonovog mosta promene otpornosti koje se dobijaju su relativno male, pa je i promena napona na izlazu iz mosta relativno mala. Kako bi se povećala rezolucija tj. tačnost merenja, na izlazu mosta (slika 101) se dovodi instrumentacioni pojačavač koji pojačava promenu napona. Izlaz ovog pojačavača se u ovom primeru vodi na analogni ulaz A / D konvertora. Treba imati na umu da pored pojačanja koje unosi instrumentacioni pojačavač, dolazi i do ograničenja u frekvencijskom propusnom opsegu. Taj opseg se kod ovog pojačavača razlikuje od primenjenog pojačanja i potrebno je proveriti uputstvo proizvođača, kako ne bi došlo do greške u toku projektovanja mernog sistema.

Ako je na primer napon na ulazu instrumentacionog pojačavača ([INA121](#), Burr-Brown) sinusoida amplitude 20 mV, frekvencije 20 kHz i ako je $R_G = 5 \text{ k}\Omega$, potrebno je odrediti amplitudu i frekvenciju signala na izlazu pojačavača?

Poznato je iz uputstva proizvođača da je sa G označeno pojačanje instrumentacionog pojačavača (eng. *Gain*) i da iznosi:

$$G = 1 \Rightarrow [0 \text{ } 600] \text{ kHz}$$

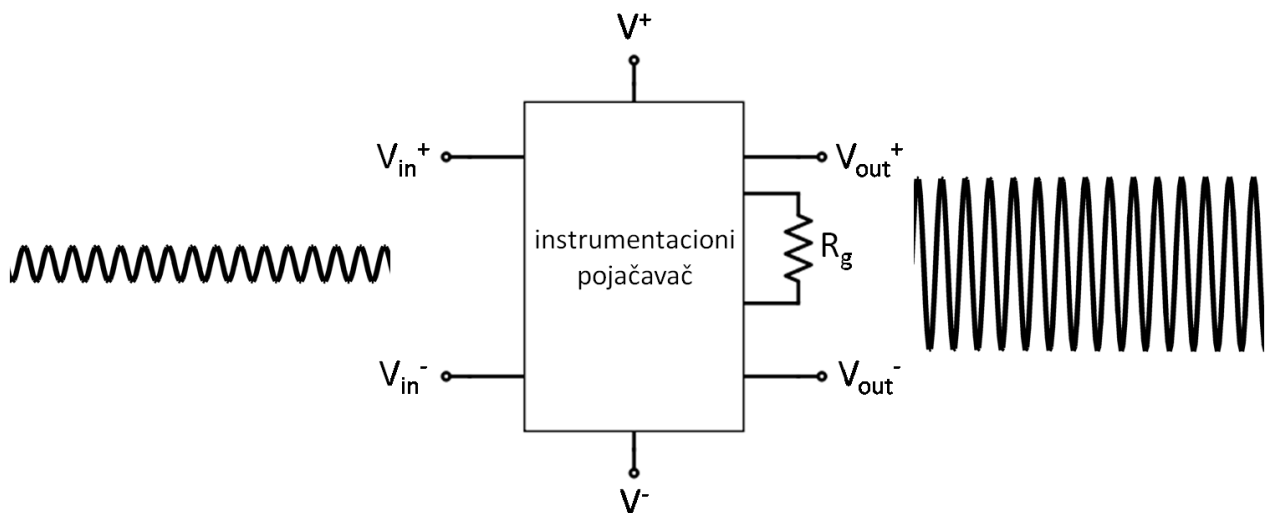
$$G = 10 \Rightarrow [0 \text{ } 300] \text{ kHz}$$

$$G = 100 \Rightarrow [0 \text{ } 50] \text{ kHz}$$

$G = 1000 \Rightarrow [0.5] \text{ kHz}$

Za $R_G = 5 \text{ k}\Omega$, pojačanje je $G = 1 + \frac{50 \text{ k}\Omega}{R_G} = 11$. Iz uputstva proizvođača, vidi se da je propusni opseg za ovo pojačanje jednak $[0.5] \text{ kHz}$. Kako signal na ulazu instrumentacionog pojačavača ima frekvenciju 20 kHz, onda neće doći do distorzije frekventijskog opsega pojačavača, odnosno izlazni signal će imati amplitudu od 0.22 mV i frekvenciju 20 kHz.

Kakav je signal na izlazu pojačavača, ako se frekvencija ulaznog signala promeni sa 20 kHz na 1 MHz? Frekvencija od 1 MHz je veća od opsega instrumentacionog pojačavača za bilo koje odabrano pojačanje, pa ovaj signal neće biti propušten na izlazu pojačavača. Odnosno nemoguće je datim instrumentacionim pojačavačem pojačati signal frekvencije 1 MHz. Na slici 102 data je ilustracija rada instrumentacionog pojačavača za sinusoidni signal čija frekvencija se nalazi unutar frekventijskog opsega instrumentacionog pojačavača. Amplituda signala na izlazu iz pojačavača na slici 102 je pojačana 5 puta u odnosu na amplitudu signala na ulazu pojačavača.

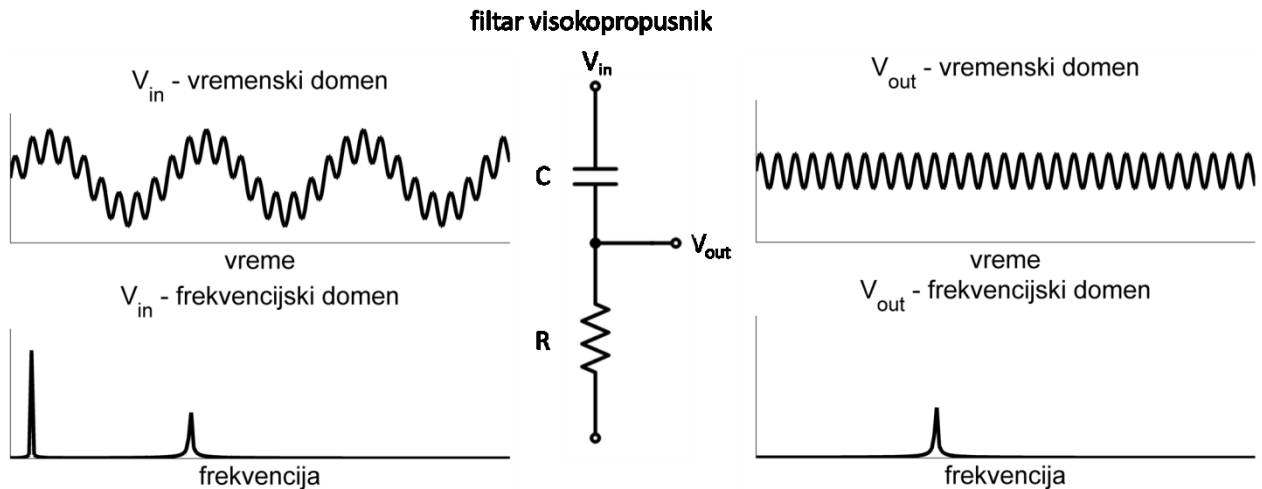


Sl. 102, Primer ulaznog i izlaznog sinusoidalnog signala instrumentacionog pojačavača. Sa V_{in}^+ i V_{in}^- su označeni ulazni potencijali, sa V_{out}^+ i V_{out}^- su označeni potencijali izlaznog signala, sa R_g označen je otpornik kojim se podešava pojačanje instrumentacionog pojačavača i sa V^+ i V^- označeni su kontakti za napajanje integrisanog čipa.

6.2.2 Filtri

Analogni filtri se koriste u elektronskim kolima za kondicioniranje signala i služe za uklanjanje neželjenih frekvencija na signalu i / ili za pojačanje / propuštanje frekventijskog opsega od značaja. Na primer, ako je potrebno filtrirati relativno niske frekvencije u signalu tada je neophodno primeniti filter

visokopropusnik (eng. [high pass filter](#)). Najjednostavnije kolo koje se može koristiti u tu svrhu je [RC](#) kolo. Primer RC filtra koji propušta visoke frekvencije na ulaznom signalu V_{in} je prikazan na slici 103. Signali na ulazu V_{in} i na izlazu V_{out} filtra su prikazani u vremenskom i u frekvencijskom domenu na slici 103.



Sl. 103, Primer jednostavnog filtra (RC kolo) i primer signala na ulazu i na izlazu iz filtra. Primećuje se filtrirana frekvencijska komponenta na nižim učestanostima ($f < f_c$) u frekvencijskom domenu, kao i filtriran šum niže frekvencije od korisnog signala u vremenskom domenu.

U RC kolu kao sa slike 103, frekvencija odsecanja filtra f_c računa se prema sledećoj relaciji:

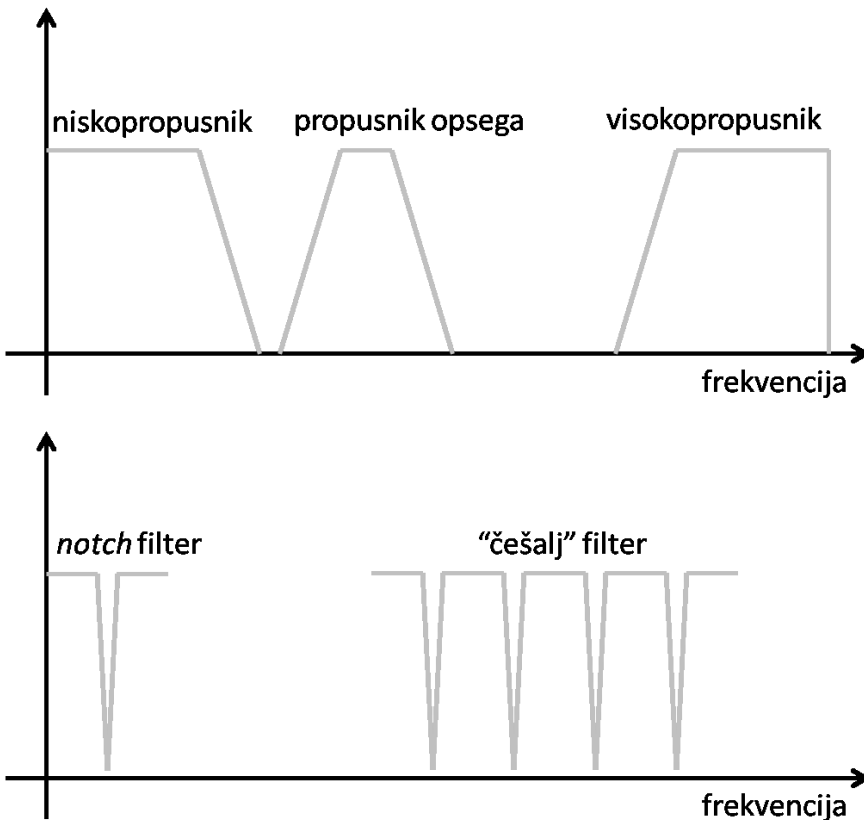
$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi RC} \quad \text{Relacija 157}$$

Iz relacije 157 sledi da se prilikom projektovanja jednostavnog filtra za odsecanje visokih frekvencija na signalu frekvencija odsecanja filtra f_c podešava odabirom odgovarajućih otpornosti otpornika R i kapacitivnosti kondenzatora C . Postoji više tehnika koje se mogu koristiti za realizaciju analognih filtara. Na primer Kauerova topologija (eng. [Cauer topology](#)) koristi pasivne električne komponente prilikom projektovanja analognih filtara. Salen-Kej topologija (eng. [Sallen-Key topology](#)) se koristi za implementaciju aktivnih filtara drugog reda i široko je zastupljena zbog svoje jednostavnosti.

Postoji veliki broj mogućih realizacija analognih filtara. Takođe, filtre je moguće realizovati i softverski – [digitalni filtri](#) koji se najčešće opisuju pomoću funkcije prenosa (eng. [transfer function](#)) i pomoću transformacija (na primer [Z-transformacija](#)), ako se radi o linearnim filtrima. U tom slučaju filtracija signala ne pripada koraku kondicioniranja signala, već obrade signala na računaru. U praksi se koristi kombinacija analognih i digitalnih filtara za merenje signala.

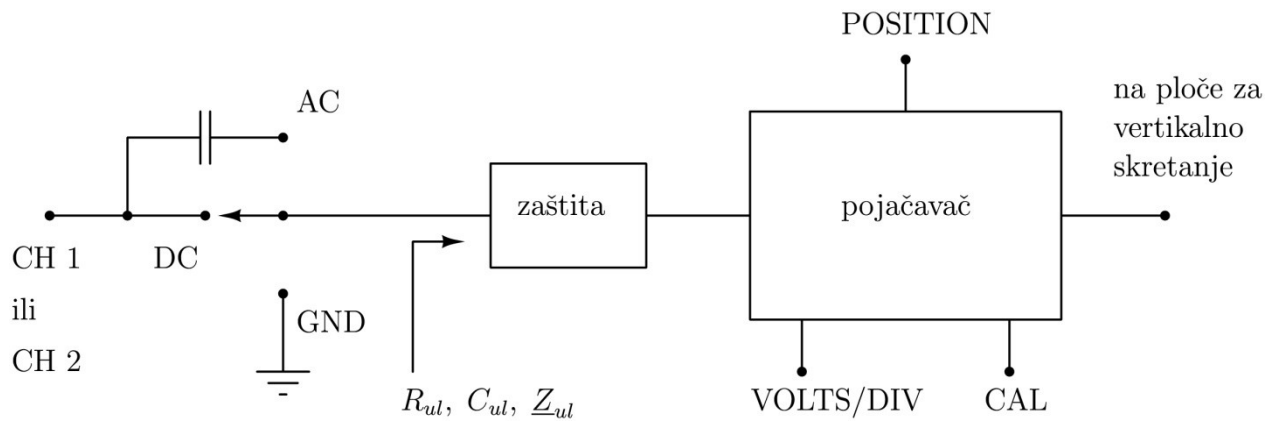
Na slici 104 na gornjem panelu je dat primer najčešće korišćenih filtara: BP (eng. *band pass*) – propusnik opsega frekvencija, LP (eng. *low pass*) – niskopropusnik frekvencija, HP (eng. *high pass*) – visokopropusnik frekvencija [40]. Na donjem panelu na slici 104 dat je primer *notch* filtra i "češalj" filtra

koji su takođe zastupljeni u praksi. *Notch* filter je filter nepropusnik opsega frekvencija (eng. *band stop*) za jednu frekvenciju i najčešće se koristi u slučaju kada se prilikom merenja indukuje šum od [AC napajanja](#) (50 Hz ili 60 Hz). "Češalj" filter predstavlja realizaciju više *notch* filtera i najčešće se koristi kao nepropusnik jedne frekvencije i njenih harmonika. Prikaz ovih filtera na slici 104 je samo ilustracijski, jer u zavisnosti od odabranih parametara filtera i njegove realizacije zavisi kakvo će biti slabljenje u propusnom, nepropusnom i prelaznom frekventijskom opsegu [40].



Sl. 104, Prikazani su različiti frekventijski opsezi filtera: na gornjem panelu su prikazani filteri niskopropusnik, propusnik opsega i visokopropusnik, a na donjem panelu su prikazani *notch* i "češalj" filter.

Postoji relativno veliki broj primena filtera u električnim merenjima i opis svih tih primena prevazilazi gradivo koje je opisano u ovom udžbeniku. Na primer, filteri se koriste u osciloskopima kada se prikazuje AC tj. naizmjenična komponenta signala i ovi filteri se koriste za filtriranje DC komponente signala. Primer dovođenja signala na ploče za vertikalno skretanje i odabir AC i DC moda je prikazan na slici 105. Opširnije, u položaju AC (na osiloskopu) signal se dovodi na ulaz pojačavača preko razdvojnog kondenzatora koji sa ulaznom otpornošću čini filter propusnik visokih frekvencija (RC kolo koje ima ulogu filtra visokopropusnika). Na taj način se izdvaja (filtrira) jednosmerna komponenta signala, a pojačavaču se prosleđuje samo naizmjenična komponenta signala [28].



Sl. 105, Pimer dovođenja signala na ploče za vertikalno skretanje i primer "uključenja" (preko mehaničkog prekidača) filtra za filtriranje DC komponente signala (tj. za prikaz AC signala). Slika je preuzeta uz dozvolu iz P. Pejović, [Princip rada i primena osciloskopa](#) [28], Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet, 2015.

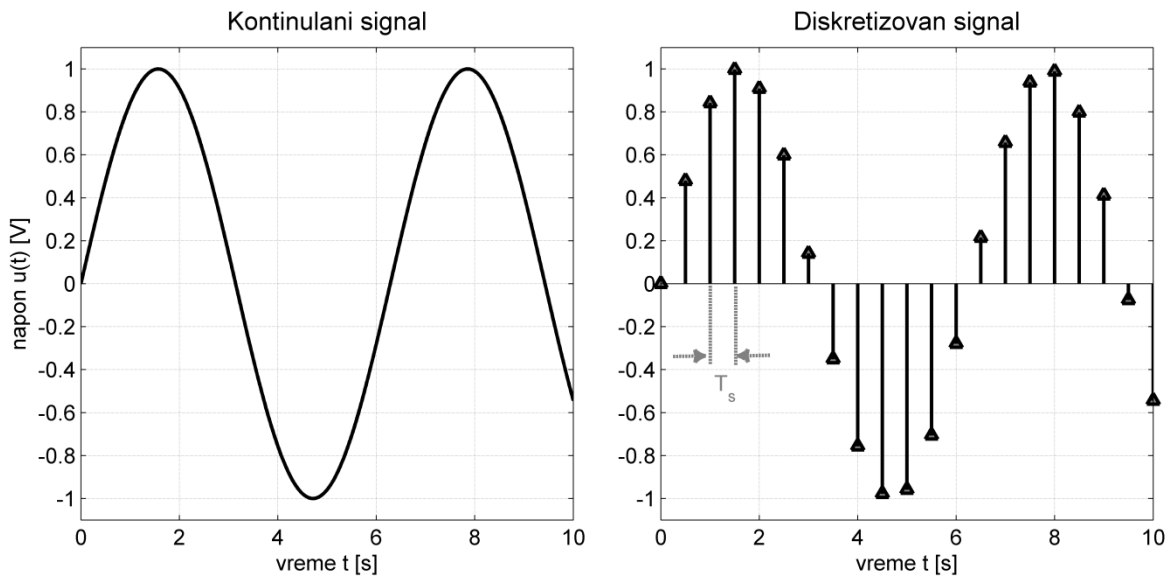
6.3 A / D konverzija signala

[Analogno-digitalni](#) (AD) konvertori se koriste u mernim sistemima koji su zasnovani na primeni računara. Nekada su deo integrisanog sistema za [akviziciju podataka](#) koja uključuje i senzore za merenje signala i elektronska kola za kondicioniranje signala. A / D konverzija uključuje kvantizaciju signala (diskretizaciju po amplitudi) i odabiranje signala (diskretizaciju u vremenu):

1. Kvantizacija signala uvek unosi neku grešku i određuje rezoluciju merenja u ovim sistemima.
2. Odabiranje / uzorkovanje signala se vrši prema [Nikvist - Šenonovoj teoremi](#) i važno je odabrati odgovarajuću frekvenciju odabiranja kako bi bilo moguće rekonstruisati originalni signal.

Primer analognog signala $x(t)$ na ulazu A / D konvertora i diskretizovanog signala $x(n)$ na izlazu A / D konvertora je dat na slici 106 sa obeleženom periodom odabiranja T_s .

U zavisnosti od primene za koju se projektuje računarski merni sistem i u zavisnosti od prirode signala (koji se meri) bira se odgovarajući tip A / D konvertora. Dva najvažnija parametra su rezolucija i frekvencija odabiranja (eng. *sampling rate*) A / D konverzije. Postoje različite vrste A / D konvertora (*flash*, *pipeline*, *sar*, *integr*, *delta-sigma*) koji se razlikuju po rezoluciji A / D konverzije i po frekvenciji odabiranja. Na primer *flash* konvertori su u opsegu od preko 100 MHz što je relativno velika frekvencija odabiranja za merenje signala, ali imaju rezoluciju koja je relativno manja od ostalih konvertora (do 8 bita), dok za *delta-sigma* konvertor je moguće odabrati veću rezoluciju A / D konverzije, a manju frekvenciju odabiranja [40].



Sl. 106, Prikaz kontinualnog $u(t)$ i diskretnog napona na levom i desnom panelu, respektivno. Na desnom panelu je prikazana i perioda odabiranja T_s .

6.4 Obrada signala

Obrada signala se radi sa ciljem izdvajanja korisnih komponenti signala ili sa ciljem uklanjanja šuma. Moguće je vršiti obradu signala i u vremenskom i u frekvencijskom domenu. U prethodnom poglavlju je pokazano kako je moguće projektovati elektronska kola za obradu signala na primeru analognih filtera. Međutim, analizu signala (kao i filtriranje) je moguće realizovati na računaru. U savremenim mernim sistemima koji su zasnovani na primeni računara obrada signala se u velikom obimu izvršava na računaru.

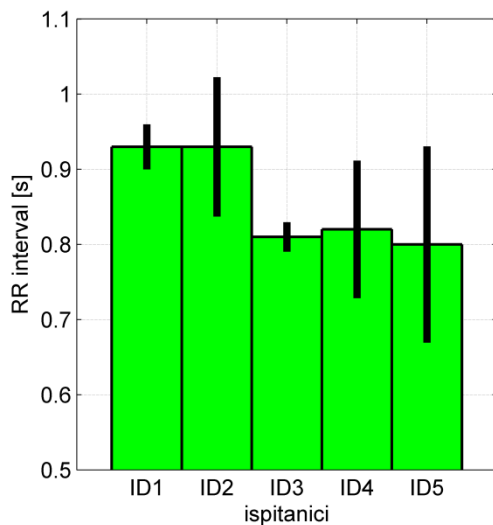
Postoje *online* i *offline* metode obrade signala i od vrste primene zavisi njihov odabir, ali i od primenjene metode. Naime, neke metode su vremenski zahtevne i nije ih moguće *online* realizovati na računaru, jer unose relativno velika kašnjenja.

Za uklanjanje neželjenih komponenti na signalu (šum), odnosno za izdvajanje korisne informacije iz signala poželjno je imati što više znanja o samom signalu i izvoru šuma, kako bi se primenila odgovarajuća metoda obrade signala. Cilj obrade signala je predstavljanje rezultata merenja ili drugih relevantnih parametara merene veličine. Zato ovaj segment mernog sistema uvek uključuje i računanje merne nesigurnosti za realizovano merenje (primer prikaza rezultata merenja primenom odgovarajućih tehnika za analizu signala i računanje merne nesigurnosti je prikazan na slici 107).

Na primeru merenja EKG signala osciloskopom koji je predstavljen u prvom poglavlju, pokazano je kako se vrši računanje merne nesigurnosti i predstavljanje rezultata merenja. Međutim, jedina korisna

informacija na tom signalu je bila R zubac, jer je zadatak bio da se trajanje RR intervala, pa ostali segmenti na EKG signalu nisu bili od značaja.

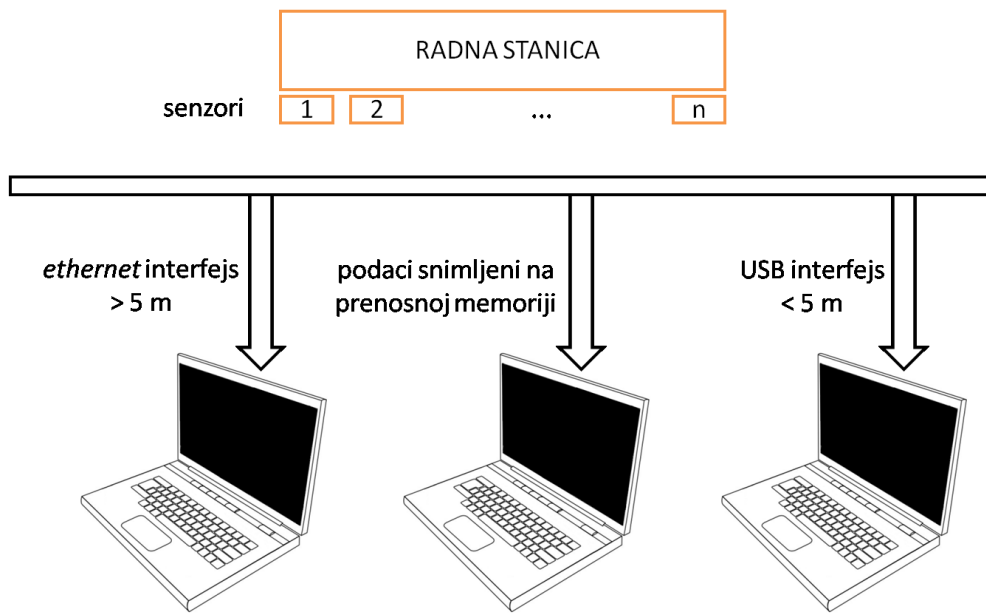
Rezultat merenja tj. rezultat obrade signala se može predstaviti numerički ili grafički. Na slici 107 dat je najjednostavniji primer predstavljanja rezultata merenja pomoću blok dijagrama. Međutim, rezultate merenja i primenjene obrade signala moguće je predstaviti ne samo preko jednodimenzionih 1D grafika, već i preko 2D i 3D grafika. Prikaz odnosno vizuelizacija rezultata zavise od cilja merenja i od prirode dobijenih podataka.



Sl. 107, Primer predstavljanja rezultata merenja RR intervala sa EKG signala sa prikazanom mernom nesigurnošću pomoću blok dijagrama.

6.5 Prenos podataka

Prenos podataka u mernim sistemima od A / D konvertora ili mernog uređaja do računara, može se obaviti preko različitih standardnih interfejsa: [RS232](#), [GPIO](#), [HART](#), [USB](#), [FireWire](#), [PCI](#), [PCMCIA](#), [Bluetooth](#), [IrDA](#), [GSM](#), [UMTS](#), [Ethernet](#), [LAN](#), [CAN](#), [I²C](#), [UART](#) i drugi. Svaki od ovih interfejsa je predviđen za posebne namene i bira se i realizuje u skladu sa aplikacijom (slika 108). Neki od ovih interfejsa omogućavaju žični, a neki bežični prenos. USB (eng. *Universal Serial Bus*) je univerzalni serijski interfejs koji se koristi za prenos podataka na razdaljinama koje su manje od 5 m [40]. *Ethernet* interfejs se uobičajeno koristi za razdaljine koje su veće od 5 m (slika 108). Pored standardnih telekomunikacionih protokola, prenos podataka je moguće vršiti i na prenosnoj memorijskoj kartici ili uređaju.



Sl. 108, Primer različitih interfejsa za kominkaciju i prenos podataka između radne stanice (na kojoj se vrše merenja sa n senzora ili u opštem slučaju pretvarača) i korisnika.

Postoje uređaji i moduli koji se koriste u merenjima i koji rade po principu *Plug and play*. Ovakvi uređaji omogućavaju automatsku konfiguraciju i detekciju periferija, bez dodatnih podešavanja na računaru. Najčešće se u uređajima široke potrošnje princip *Plug and Play* koristi i za konfiguraciju komunikacionih protokola.

6.6 Softver za akviziciju signala

Softver za akviziciju signala omogućava merenje signala i u većini slučajeva osnovna namena tog softvera je vizuelizacija i analiza merenih signala (*online* ili *offline* ili u oba režima rada). Za potrebe projektovanja softvera za merne sisteme koriste se različita programska okruženja. U zavisnosti od krajnjeg korisnika vrši se projektovanje odgovarajućeg korisničkog interfejsa (eng. *User Interface*) u formi GUI-ja (eng. *Graphical User Interface*). Veći broj programskih okruženja je na raspolaganju na tržištu za projektovanje ovih sistema. Njihova osnovna podela je na:

1. *Ready to run* aplikacije,
2. programska okruženja opšte namene i
3. programska okruženja namenjena projektovanju aplikacija posebne namene.

Neki primeri za ova tri programska okruženja prikazani su na slici 109.



Sl. 109, Primeri softverskih paketa za projektovanje mernih sistema. Slika je preuzeta uz dozvolu iz Measurement Computing, <http://www.mccdaq.com/> (Courtesy of Measurement Computing, <http://www.mccdaq.com/>).

6.6.1 Ready to run aplikacija

Open Choice Desktop ([Tektronix](#)) je softverski paket koji služi za merenje podataka sa digitalnog osciloskopa koji je povezan sa računaru (slika 110).



Sl. 110, Izgled korisničkog interfejsa softvera *Open Choice Desktop* za merenje signala pomoću osciloskopa na računaru. Prikazano je povezivanje digitalnog osciloskopa za računaru. Slika je preuzeta sa sajta [Tektronix](#) uz dozvolu (Copyright © [Tektronix](#). Reprinted with permission. All Rights Reserved).

Za povezivanje osciloskopa sa računarom mogu se koristiti RS232, GPIB, USB i LAN. Podatke je moguće prikazati u vremenskom ili frekvencijskom domenu, a moguće ih je i snimiti u fajl i sačuvati za kasniju obradu na računaru.

Ovaj program je moguće povezati sa velikim brojem osciloskopa i njegova instalacija dolazi zajedno sa alatima za povezivanje i manipulaciju snimljenim podacima u Microsoft Office softverskim programima [3]. Uz ovaj program moguće je koristiti i odgovarajuće razvojno okruženje za programiranje aplikacija (NI LabVIEW, Mathworks Matlab, Microsoft C#, Visual Basic i VisualStudio.NET).

6.6.2 Programsko okruženje opšte namene

Postoji niz programskih okruženja koja mogu da se koriste za projektovanje softvera za akviziciju signala u električnim merenjima. Na primer [Python](#) je objektno-orijentisan interaktivni programski jezik i može se koristiti za projektovanje aplikacija za merenje signala. Veoma je popularan, jer je [Open source](#) [18]. Ovo programsko okruženje se danas sve češće koristi i za projektovanje mernih sistema.

```
close all
clear all
clc

% provera uređaja koji su dostupni za merenje
daq.getVendors()

% kreiranje sesije
s = daq.createSession('ni');

% kreiranje kanala
s.addAnalogInputChannel('Dev1', 'ai0', 'Voltage');

% merenje jedne vrednosti signala
odbirak = myDaq.inputSingleScan
```

Sl. 111, Primer jednostavnog programa u Matlab-u (Mathworks Co., Natick, USA) koji omogućava povezivanje softverske aplikacije sa akvizicionom karticom i merenje jednog odbirka signala.

Na slici 111 prikazan je primer programa koji omogućava da se u programskom okruženju Matlab (Mathworks Co., Natick, USA) mere signali primenom NI (National Instruments Inc.) akvizicione kartice. Matlab nije programsko okruženje opšte namene, već programsko okruženje šire namene koje je posebno projektovano sa ciljem numeričkog izračunavanja. Međutim, ovo programsko okruženje sadrži i dodatne biblioteke sa funkcijama posebne namene koje omogućavaju i merenje signala (kao na slici 111).

6.6.3 Virtuelni instrumenti i programska okruženja posebne namene

Sa ubrzanim razvojem A / D hardvera koji se relativno jednostavno povezuju i koriste na personalnim računarima - [PC](#) (eng. *personal computer*) i laptop računarima, ubrzano su se razvila i programska okruženja koja su dalje omogućila razvoj [virtuelnih instrumenata](#). Ovi instrumenti omogućavaju da se kontrole i indikatori predstave na ekranu kako bi se omogućilo jednostavno upravljanje sistemom manipulacijom računarskog miša, tastature ili primenom nekog drugog pogodnog interfejsa [26].

Ovi uređaji su naišli na relativno široku primenu u nauci, industriji, avio-saobraćaju i medicini. Pomoću virtuelnih instrumenata je moguće projektovati softverske alate za posebne namene, pa se vrlo često u praksi sreću virtuelni osciloskop i virtuelni DMM kod kojih osim odgovarajuće A / D kartice nije neophodno koristiti dodatni hardver. Zbog ekonomičnosti, jednostavnosti i mogućnosti da se relativno brzo projektuju gotova softverska rešenja široko su rasprostranjeni za potrebe testiranja u inženjerskim primenama. Posebnu primenu ovi sistemi imaju i u biomedicinskim aplikacijama na primer za potrebe merenja različitih elektrofizioloških signala (npr. elektrokardiograf [EKG](#), elektromiograf [EMG](#), elektroneurograf [ENG](#) i drugi).

Postoje dve vrste virtuelnih instrumenata [40]:

1. instrumenti koji su projektovani korišćenjem akvizicione kartice (u kojoj se nalaze kola za kondicioniranje i diskretizaciju signala) i celokupna merna procedura se obavlja na računaru i
2. klasični merni uređaji kao što su multimetri i generatori koji su povezani sa računarom preko nekog interfejsa (na primer preko USB porta).

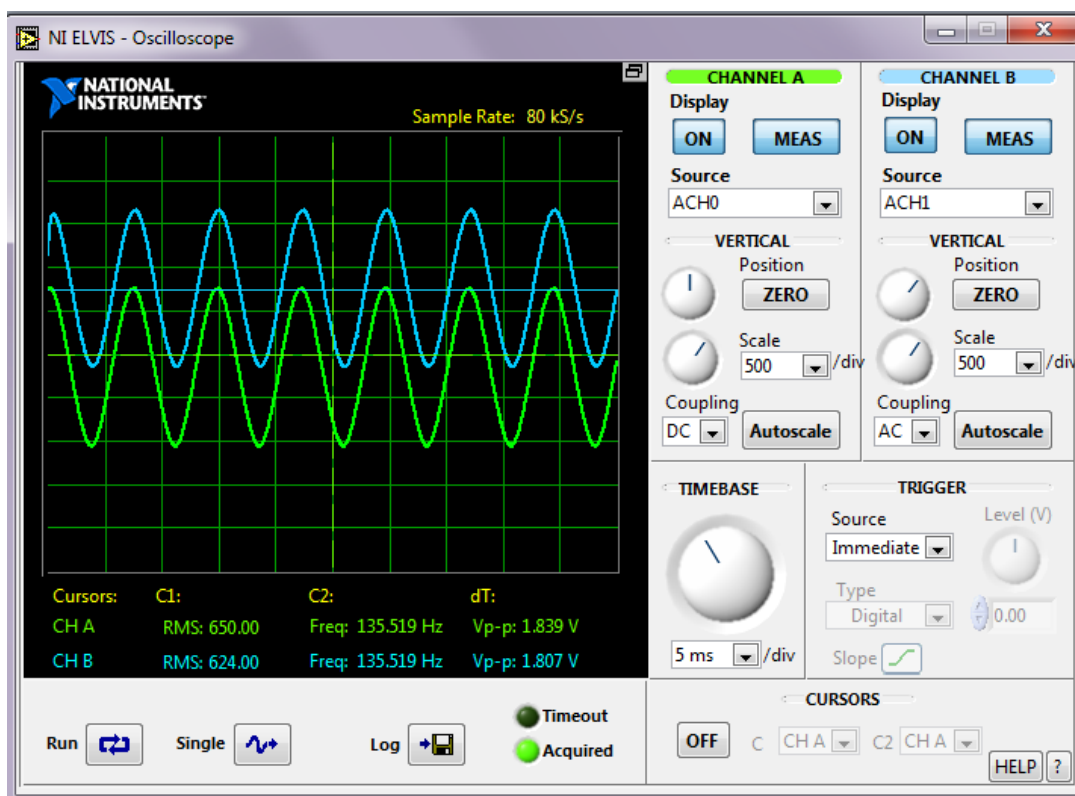
U drugom slučaju merni instrumenti se koriste kao alatke (periferije) virtuelnog instrumenta koji je realizovan na računaru na kome se rezultati po potrebi i shodno nameni analiziraju, prikazuju i memorišu.

Softverske aplikacije posebne namene zajedno sa hardverom za snimanje signala predstavljaju važan deo virtuelnih instrumenata. Primeri programskih paketa u kojima je moguće projektovati softverske aplikacije virtuelnih instrumenata su:

1. LabVIEW (National Instruments Inc.),
2. TestPoint (Capital Equipment Co.),
3. DasyLab (Dasytec),
4. Matlab – Acquisition Toolbox (Mathworks Inc.),
5. SoftWire (MS Visual Studio.Net) i
6. drugi.

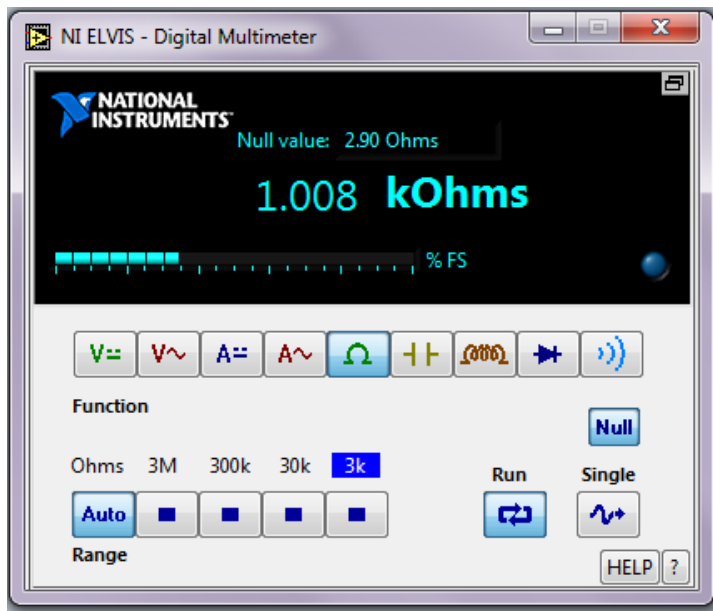
Važan aspekt prilikom projektovanja virtuelnih instrumenata u električnim merenjima je korisnički interfejs. On omogućava interakciju sa korisnikom / operaterom i određuje način predstavljanja rezultata merenja. Većina korisničkih interfejsa virtuelnih instrumenata koji su namenjeni potrebama električnih merenja projektuje se po ugledu na interfejse realnih instrumenata. Primeri korisničkih interfejsa za virtuelni osciloskop i virtuelni DMM u okviru NI ELVIS I (National Instruments Inc., Austin, USA) programskog okruženja su prikazani na slikama 112 i 113, respektivno.

Većina programskih okruženja koja omogućava projektovanje virtuelnih instrumenata zasniva se na principu jednostavnog i relativno brzog programiranja kako bi se testiranje (za koje se u velikoj meri ovi instrumenti i koriste) obavilo na što efikasniji način.



Sl. 112, Primer korisničkog interfejsa virtuelnog osciloskopa u okviru softverske aplikacije NI ELVIS I (National Instruments Inc., Austin, USA). Na slici je prikazan signal koji je doveden sa AC generatora signala frekvencije 135 Hz. Na kanalu A (ACH0 na akvizicionoj kartici) prikazana je trenutna vrednost signala (DC Coupling), a na kanalu B (ACH1 na akvizicionoj kartici) prikazana je naizmenična komponenta signala (AC Coupling).

Iskustvo je pokazalo da čak i najpreciznije i najbolje urađeno merenje nije od koristi, ako korisnički interfejs nije čitljiv i ako zbunjuje korisnika. Od velikog je značaja projektovanje preglednog korisničkog interfejsa (po ugledu na [Desktop metaforu](#)) i ono se najčešće radi po ugledu na već postojeći interfejs (kao u primeru osciloskopa i DMM-a na slikama 112 i 113).



Sl. 113, Izgled virtuelnog DMM-a u okviru NI ELVIS I softverske aplikacije (National Instruments Inc.). Prikazan je izgled ekrana za merenje otpornosti otpornika od 1 k Ω . Primetiti da je NULL vrednost (dobijena prilikom kalibracije ommetra) jednaka 2.90 Ω i da je odabir opsega za merenje otpornosti podešen na automatski režim.



Sl. 114, Primer povezivanja A / D kartice USB NI 6008 ([National Instruments Inc.](http://www.ni.com)) sa računarom preko USB porta za projektovanje virtualne instrumentacije.

Virtuelna instrumentacija omogućava relativno brzo prilagođavanje aplikacije zahtevima, proizvodima i procesima [42]. Ovi uređaji su promenili donekle merenja i testiranja, jer su sada merni sistemi zasnovani u velikoj meri na softveru. Primer jednog virtuelnog instrumenta koji koristi odgovarajući akvizicioni

modul povezan sa računarom i softversku aplikaciju prikazan je na slici 114. Nove funkcije se dodaju jednostavnom izmenom softverske aplikacije.

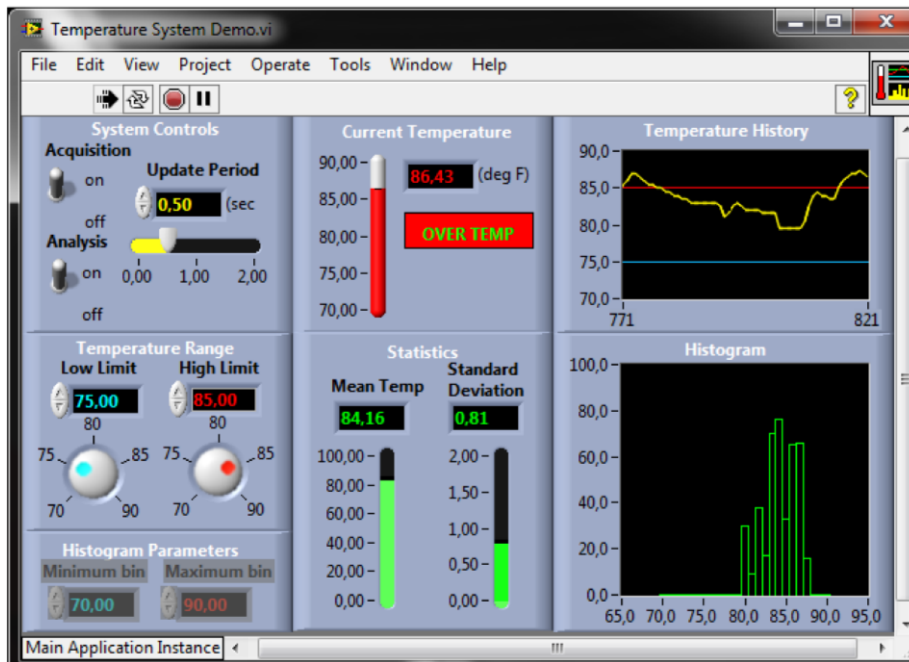
Najčešće programi koji su namenjeni za projektovanje virtuelnih instrumenata koriste simbole i grafičku prezentaciju funkcija kako bi se ubrzao razvoj aplikacija i kako bi se omogućilo jednostavno rukovanje ovim alatima. Visok nivo apstrakcije ovih aplikacija ubrzava vreme od početka projektovanja do testiranja, što može imati široku primenu u industriji. Kao takvi ovi alati su poslednjih godina postali neizostavni deo u obrazovanju inženjera, jer omogućavaju realizaciju tzv. *hands-on* kurseva. Optimalna primena u obrazovanju, po mišljenju Autora, podrazumeva umereno poznavanje virtuelnih instrumenata koje je više usmereno ka generalnim i manje ka specifičnim principima sa posebnim akcentom na osnovne principe električnih merenja uz neizostavnu praktičnu primenu kroz laboratorijske vežbe.

Postoje situacije u kojima je poželjno koristiti virtuelne instrumente. Primera radi, može se porediti funkcionalnost virtuelnog instrumenta sa tradicionalnim instrumentom za merenje temperature primenom termistora u mernom Vitstonovom mostu. Korišćenjem tradicionalne instrumentacije potrebno je koristiti izvor za napajanje, osciloskop i povezati sve sa protobordom na kome je realizovan merni most. Dodatno, nije moguće snimiti signal na nekom medijumu, već se on posmatra na osciloskopu. Ako se radi o digitalnom osciloskopu moguće ga je povezati sa računarom i koristiti neki od gotovih softverskih paketa koji omogućavaju da se signal posmatra na ekranu i da se snimi u neki dokument, ali koji ne pružaju mogućnost ikakvih izmena unutar korisničkog interfejsa. Moguće je dalje razviti odgovarajući korisnički interfejs (u programskom okruženju opšte namene), ali ako razvoj tog interfejsa nije isplativ (odnosno uloženo vreme će doneti veći trošak u odnosu na broj planiranih realizacija merenja), onda je idealno rešenje projektovanje virtuelnog instrumenta. Ovo pogotovu važi, ako je kod svakog merenja potrebno dodatno uneti odgovarajuću izmenu u korisničkom interfejsu bilo da se radi o prikazu, analizi ili o parametrima merenja signala, onda je potrebno koristiti skalabilnu aplikaciju koja se relativno jednostavno menja u skladu sa potrebama korisnika [42].

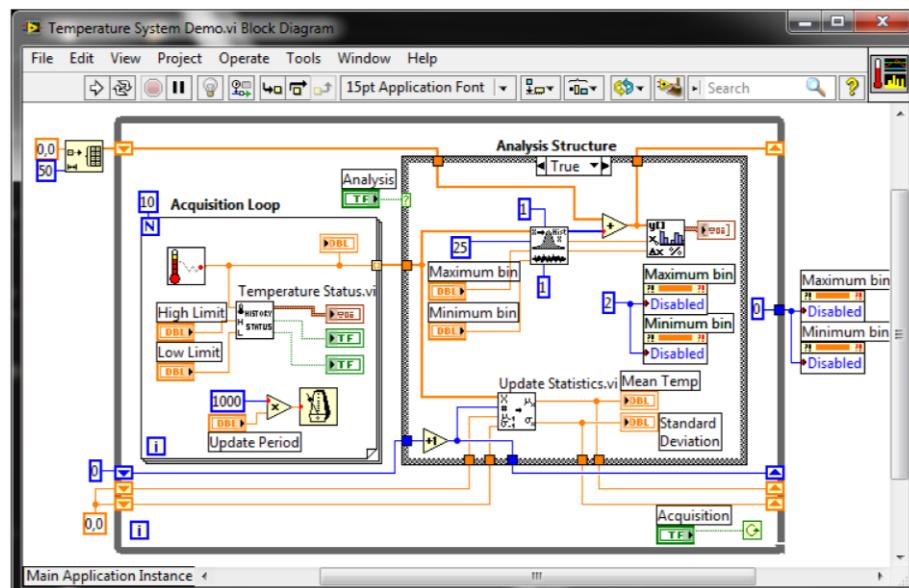
Ovaj virtuelni instrument je moguće, osim sa digitalnim osciloskopom projektovati i korišćenjem hardverske akvizicione kartice, koja se na primer povezuje sa računarom preko USB porta i tada je u većini slučajeva moguće koristiti i DC napajanje (5 V preko USB-a), pa nije potrebno koristiti generator napona.

Virtuelni instrument projektovan za potrebe merenja temperature primenom termistora može da sadrži niz funkcija kao što su na primer: grafički prikaz merenog napona u realnom vremenu, prikaz proračunate otpornosti i / ili temperature termistora, prikaz pomoću bar dijagrama umesto grafika, uključenje alarma (audio, vizuelni ili tekstualni) za razne opsege merenih temperatura, mogućnost da korisnik menja prikaz, mogućnost da se podaci snimaju u fajl ili šalju mail-om. Dodatno, moguće je realizovati generisanje izlaza (u slučaju da se koristi akviziciona kartica) digitalnih ili analognih na osnovu kojih se vrši upravljanje ili uključenje hardverskog alarma (na primer: LED na protobordu) i mnoge druge opcije. Prilikom unošenja bilo kakve izmene u program, nije neophodna izmena hardvera, već se jednostavno unese promena u okviru softverske aplikacije virtuelnog instrumenta. To je delimično omogućeno i modularnim načinom programiranja u nekim namenskim softverskim okruženjima, jer zadatak može biti podeljen na više manjih delova kojima se jednostavno pristupa i koji se jednostavno menjaju. Najčešće ovi softverski

paketi uključuju veliki broj drajvera za hardver koji se nalazi na tržištu i samim tim omogućavaju [plug & play](#) funkcionalnost ovih integrisanih uređaja.



Sl. 115, Ugrađeni primer za merenje temperature u LabVIEW programskom okruženju *Temperature System Demo.vi* (National Instruments Inc., Austin, USA). Prikazan je izgled korisničkog interfejsa ili Front Panel-a.



Sl. 116, Blok dijagram sistema za merenje temperature čiji je korisnički interfejs prikazan na slici 115. "Žice" koje povezuju blokove na slici označavaju protok podataka u programu (boja žice predstavlja tip podatka, a debljina žice predstavlja dimenziju podatka: plava boja označava podatke tipa *integer*, narandžasta *double* i slično).

Finalni proizvod za merenje temperature kao što je na primer klima uređaj koji u sebi sadrže senzore za merenje temeprature neće nikada imati implementiran virtuelni instrument, jer je to preskupo i nepotrebno za njihovu realizaciju. Međutim, prilikom projektovanja ovog instrumenta i njegovog testiranja utrošeno vreme može biti značajno redukovano primenom virtuelnog instrumenta.

Primer razvojnog okruženja za projektovanje virtuelnih instrumenata je LabVIEW (National Instruments Inc., Austin, USA). Ovaj softverski paket je postao široko rasprostranjen zahvaljujući integraciji sa mernim hardverom pretežno sopstvene proizvodnje. Kada se koristi LabVIEW za projektovanje virtuelnih instrumenata, tada se za konfiguraciju hardvera koji se nalazi na računaru i za testiranje koristi MAX aplikacija ([Measurement & Automation Explorer](#), National Instruments, Inc., Austin, USA).

Jedna od opcija koju nudi ovaj softver je simulacija signala koje je moguće izmeriti hardverom. Na taj način se ubrzava vreme razvoja, jer je moguće testirati funkcionalnost softvera na simuliranom hardveru. MAX se koristi za konfiguraciju i hardvera i softvera i u njemu se mogu dodavati kanali, vršiti unos frekvencije odabiranja, kreirati interfejsi, skale i druge opcije za merenje signala. Primer korisničkog interfejsa i programskog koda virtuelnog instrumenta za merenje temperature prikazan je na slikama 115 i 116, respektivno.

Korisnički interfejs koji je prikazan na slici 115 sadrži sekcije u kojima su prikazane informacije od interesa. Na primer, vrednost temperature je prikazana u prethodnim vremenskim trenucima (desni gornji panel), histogram za merene podatke je prikazan u donjem desnom panelu, statistički podaci (srednja vrednost i standardna devijacija su prikazani na srednjem donjem panelu i grafički i numerički), trenutna temperatura je prikazana na gornjem srednjem panelu grafički i numerički zajedno sa alarmom. Na levom gornjem panelu na korisničkom interfejsu na slici 115 prikazane su osnovne kontrole (početak i kraj merenja, početak i kraj analize podataka i perioda odabiranja označena kao *Update Period*). Opsezi temperatura koje korisnik definiše (granice za određivanje alarma) su prikazane na donjem levom panelu na slici 115.

Korisnički interfejs se projektuje prema potrebama merenja i prema zahtevima korisnika. Međutim, postoje i neka osnovna pravila za dizajn odgovarajućeg korisničkog interfejsa. Primeri tih pravila su [41]:

1. Korisnički interfejs bi trebalo da bude relativno jednostavan ("skoro nevidljiv" za korisnika) i da nema dodatnih zbunjujućih informacija.
2. Interfejs bi trebalo da je konzistentan (na primer: ne treba koristiti više od jedne ili dve vrste fontova, ne treba koristiti više od jedne ili dve veličine slova).
3. Najvažniji elementi interfejsa bi trebalo da su uočljivi (na primer: alarme postaviti na vidno mesto, kako bi korisnik mogao relativno jednostavno i brzo da ih uoči).
4. Pažnja koju korisnik posvećuje pojedinim elementima može da bude određena i korišćenjem različitih tekstura i boja koje bi pomogle da se pažnja korisnika preusmeri ka delu interfejsa od interesa.
5. Pravilno korišćenje [tipografije](#) može biti od koristi za ukupni izgled, ali i za pravilno grupisanje elemenata na korisničkom interfejsu.

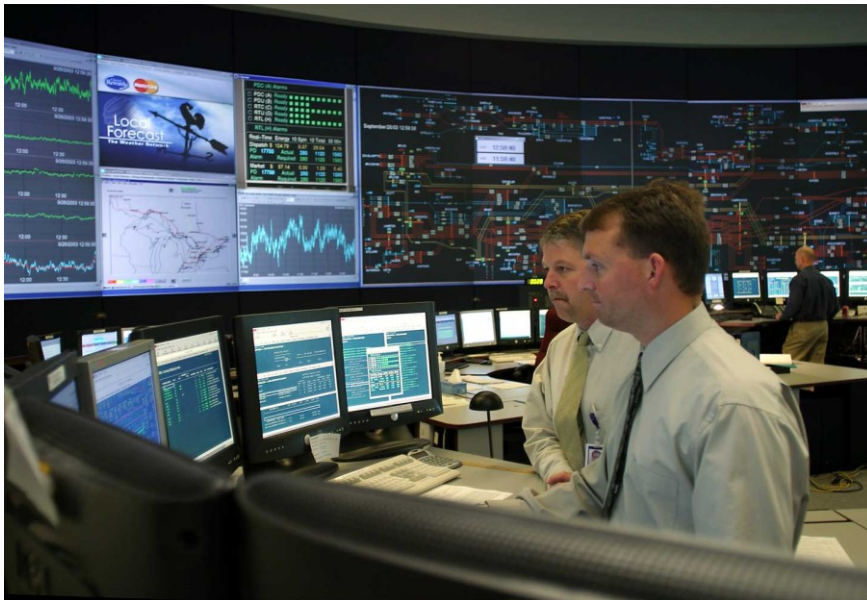
6.6.4 SCADA

SCADA (eng. *supervisory control and data acquisition*) je sistem za daljinsko upravljanje. Najčešće se u ovakvim kontrolnim sistemima vrši i merenje signala kako bi se omogućio odgovarajući nadzor ili korekcija upravljačkog signala.

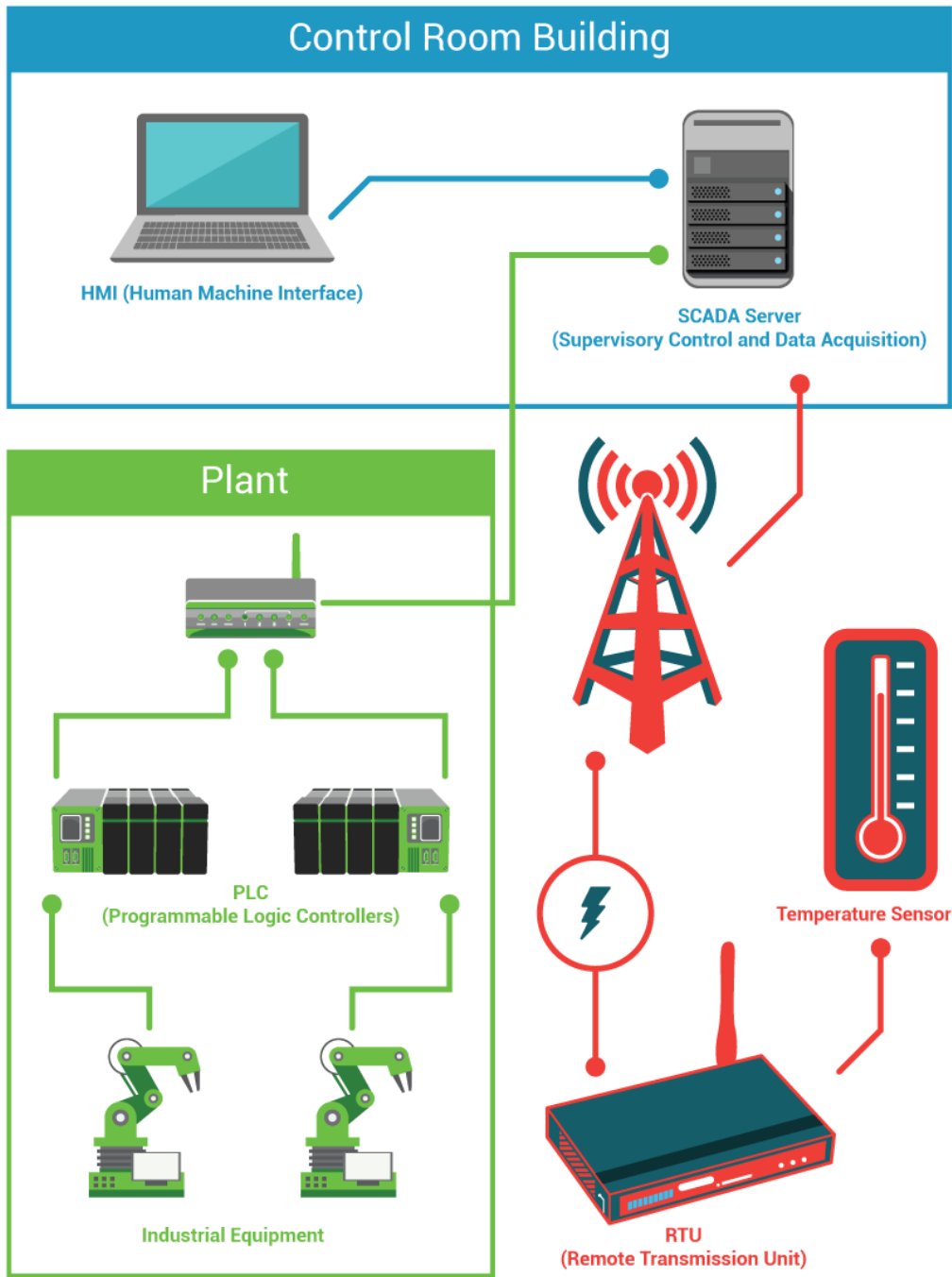
SCADA je sastavni deo industrijskih sistema (npr. elektrane), infrastrukturnih sistema (npr. vodovod) i objekata (npr. avion) u kojima se vrši upravljanje, ali i merenje. SCADA je centralizovan sistem koji omogućava upravljanje jednim ili više procesa na jednoj ili više lokacija. Delovi SCADA sistema su:

1. HMI (eng. *Human-Machine Interface*) – čovek-računar interfejs,
2. supervizorni sistem,
3. RTU (eng. *Remote terminal unit*),
4. PLC (eng. *Programmable logic controller*) i
5. komunikaciona infrastruktura.

SCADA spada u opštu grupu ICS (eng. *Industrial Control System*) pored distribuiranih kontrolnih sistema DCS (eng. *Distributed Control System*) i manjih sistema zasnovanih na primeni PLC-ova (eng. *Programmable Logic Controller*).



Sl. 117, Primer kontrolne sobe sa SCADA sistemom uz dozvolu od (Courtesy of) [All about circuits: An introduction to SCADA systems](#).



Sl. 118, Primer organizacije SCADA sistema uz dozvolu od (Courtesy of) [All about circuits](#): An introduction to SCADA systems.

SCADA sistemi su visoko distribuirani sistemi koji mogu biti locirani na različitim geografskim lokacijama koje nekad uključuju i hiljade kvadratnih kilometara i u kojima se sa svih ovih lokacija vrši akvizicija podataka i upravljanje za adekvatno funkcionisanje sistema [36]. Kontrolni centar SCADA sistema vrši centralizovani monitorinig i kontrolu preko komunikacionih mreža. Primer kontrolne sobe sa SCADA

sistemom prikazan je na slici 117. Najčešće kontrolni centar uključuje prikaz merenih signala, alarme i status senzora, pored prikaza upravljačkih signala i akcija. Takva kontrolna jedinica uključuje odgovarajući interfejs između računara i operatera HMI (eng. *Human Machine Interface*). Ovakvi sistemi se sastoje iz hardverskih i softverskih komponenti, a zadaci se mogu obavljati ili automatski ili na osnovu komandi koje izdaje operater.

SCADA sistemi se projektuju sa ciljem postizanja odgovarajuće robusnosti i otpornosti na razna stanja i sa značajnom redundantnošću koja se ogleda u arhitekturi sistema. Na primer, u velikom broju slučajeva pored kontrolnog centra postoji i rezervni kontrolni centar koji se koristi u slučaju nepredviđenih okolnosti (nestanak električne energije i slično).

Osnovna jedinica SCADA sistema je terminalna daljinska jedinica [RTU](#) (eng. *Remote Terminal Unit*) koja je povezana sa opremom (slika 118). Na primer, RTU može da konvertuje upravljačke signale u digitalne upravljačke akcije koje mogu da uključuju npr. zatvaranje ventila na osnovu merenja pritiska, protoka, napona i drugih električnih (u opštem slučaju fizičkih) veličina. Merenja električnih signala bilo da se radi o direktnim ili indirektnim merenjima su od značaja za svaki SCADA sistem. Iz tog razloga, hardver SCADA sistema uključuje ili kola tj. uređaje za merenje električnih signala ili / i senzore i kola neophodna za kondicioniranje električnih signala.

Poželjno je da je softver kontrolne jedinice na kome se zasniva SCADA sistem skalabilan i jednostavan za upotrebu, kako bi na relativno brz i jednostavan način inženjeri mogli da projektuju odgovarajuće aplikacije. Signali koji se mere i šalju u kontrolni centar SCADA sistema se obrađuju i analiziraju i na osnovu njih se ili prikazuje rezultat korisniku / operateru u obliku alfanumeričkog displeja, grafika ili alarma i / ili se po njima zatvara povratna sprega i formira odgovarajući upravljački signal / komanda. Važno je napomenuti da ovi sistemi rade u realnom vremenu i da je blagovremeni prikaz i prikupljanje podataka od velikog značaja za ispravno funkcionisanje sistema. Relativno veliki broj podataka se i čuva u bazama podataka u okviru SCADA sistema koji se kasnije koriste za preciznu analizu istorije nekog događaja i njihovu procenu.

U slučaju da je nepohodno realizovati isključivo merenja na distribuiranim lokacijama, tada se ne projektuju SCADA već [telemetrijski sistemi](#). Ovi sistemi služe isključivo za monitoring i analizu prikupljenih podataka. Neki od primera telemetrijskih sistema su meteorološke i svemirske stanice.

7 TRENDOVI U SAVREMENIM MERNIM SISTEMIMA

7.1 Merenja u dopunjenoj i pojačanoj realnosti

Za projektovanje aplikacija u dopunjenoj (eng. *augmented*) realnosti koriste se senzori i metode za merenje električnih signala. [Dopunjena realnost](#) je modifikovana / pojačana realnost u kojoj postoji direktan prikaz fizičkog, realnog sveta u kome su prikazani elementi "pojačani" informacijama koju su izmerene. Merenja u dopunjenoj realnosti imaju za cilj projektovanje novih i unapređenje postojećih interfejsa između čoveka i računara. Ovi interfejsi su zasnovani na povratnoj informaciji koja se dobija obradom merenih signala. Osnovne prednosti ovih sistema su: olakšano izvršavanje zadataka, pomoć osobama sa invaliditetom, povećanje pouzdanosti i bezbednosti svakodnevnih aktivnosti i proširenje interakcije čoveka i računara i namenskih računarskih sistema (u opštem slučaju okruženja).

Većina elektronskih uređaja koji se koriste pri svakodnevnim aktivnostima pružaju jednostavnu povratnu informaciju korisniku (npr. LED indikator na kućnim aparatima, alfanumerički displej na digitalnom aparatu za merenje krvnog pritiska i drugi).



Sl. 119, Kuhinja sa hiper – realnim elementima, tekuća voda je pojačana svetlom u boji koje ukazuje na merenu temperaturu. Slika je preuzeta iz [6] uz dozvolu od prof. Leonarda Bonanija, MIT Media Laboratory (Courtesy of prof. Leonardo Bonanni, MIT Media Laboratory).

Dopunjena realnost objedinjuje elemente virtuelne realnosti koji su pripojeni elementima realnosti u okruženju. Osim dopunjene realnosti, postoji i pojačana realnost (eng. *hyper-reality*) koja se zasniva na informacijama koje su dobijene sa senzora i koje imaju za cilj da "pojačaju" informacije iz okruženja. Primer pojačane realnosti je baterija za vodu sa LED osvetljenjem, koja omogućava korisniku da osim što

može dodirnom da proceni temperaturu vode, da može i vizuelno da proceni temperaturu vode kao što je prikazano na slici 119. Pokazano je u [6] da je prikaz toplije vode crvenom bojom i hladnije vode plavom bojom intuitivan za korišćenje i kod korisnika koji su se prvi put susreli sa ovim interfejsom u praksi.

Dopunjena i pojačana realnost imaju primenu i u projektovanju interfejsa koji služe za pomoć u radu tehničara prilikom popravke štampača, astronautima tokom ekspedicija i hirurzima kao dodatna pomoć u obavljanju hirurških zahvata [6]. Međutim, dopunjena realnost se pokazala i kao nepogodna za veliki broj primena, jer je prikaz informacije u najvećem broju slučajeva u formi teksta i grafika, pa nisu jednostavni za razumevanje i praćenje. Za sada su svi ovi sistemi sa većim uspehom primenjeni u industriji zabave i pametnom okruženju (kao npr. pametna kuća).

Primer ovakvih interfejsa je [IonRoad](#) aplikacija koja omogućava da se na osnovu snimka koji se dobija kamerom na pametnom telefonu vrši prepoznavanje objekata u okruženju u vozilu. Na taj način se vozač upozorava na moguće opasnosti na putu. Ovaj softver dodatno omogućava merenje signala sa raznih senzora u automobilu, na osnovu kojih se na primer procenjuje rastojanje između vozila koje se nalazi ispred korisnika. Ovo je aplikacija koja je potpuno besplatna koristi [GPS](#) (eng. *Global Positioning System*), [žiroskope](#) (senzor ugaone brzine) i video kameru kako bi se odredila pozicija automobila na putu i omogućila povratna informacija korisniku u vidu brojeva, boja ili audio upozorenja. Rezultat merenja može biti dodat video snimku, pa vozač ima mogućnost prikaza pojačane realnosti na mobilnom uređaju u automobilu.

Još jedan primer dopunjene realnosti je opisan u [31] za čije se potrebe mere zapremina i rastojanja karakterističnih tačaka jetre i tumora jetre i to merenje se koristi za prikaz dopunjene realnosti koja ima za cilj planiranje hirurških zahvata. Jedan princip merenja koji se može koristiti za estimaciju zapremine jetre i tumora jetre je vokselizacija. Ova metoda se zasniva na pretpostavci da je 3D prostor predstavljen vokselima kojima u 2D prostoru odgovaraju pikseli, pa se na računarski pogodan način vrši "prebrojavanje" vokselu unutar regije od interesa. Sva merenja zasnovana na slici, odnosno procena merenja iz vokselu, se mogu svesti pod zajednički termin: vizuelna metrologija [37]. Kako bi se merenja zapremine ili rastojanja omogućila, jer slika ne pruža uvid u dimenzije u praksi se uvode dva značajna modela: 1) pretpostavka matematičkog 3D modela na osnovu koga se vrši merenje i 2) dodavanje referentnog objekta na sceni. Jedna realizacija praktične primene uz dodavanje referentnog objekta (2D marker - papir sa odštampanim crnim markerima) je aplikacija za procenu dimenzija nameštaja i smeštanje nameštaja u prazan prostor primenom dopunjene realnosti. Ovde bi se moglo reći i da se radi o kombinovanoj realnosti jer se komad nameštaja može fotografisati (njegov oblik i dimenzije se procenjuju), pa se onda kao takav dodaje u scenu. Ograničenje ove metode je što se tačnost merenja u zavisnosti od položaja referentnog objekta. Autori u [37] su sugerisali da bi dodavanje drugih senzora (npr. senzora rastojanja) u budućnosti moglo da poboljša kvalitet ovakvih merenja i prikaza u dopunjenoj / kombinovanoj realnosti.

Za merenja u dopunjenoj i merenja u pojačanoj realnosti treba voditi računa o metodama koje se primenjuju za analizu i prikaz signala, jer ovi sistemi rade u realnom vremenu i tolerišu se njihovo kašnjenje koje ne sme biti veće od kognicije operatera i korisnika (u praksi do 1 sekunde).

Jedna od medicinskih primena pojačane realnosti je korišćenje merenja na osnovu [NIRS](#) (eng. *Near Infrared Spectroscopy*) tehnike za vizuelizaciju krvnih sudova. Uređaj VienVIEWER ([Cristie Medical Holdings, Inc., USA](#)) uključuje projekciju slike na površinu kože pacijenta koja se menja u realnom vremenu i koja prikazuje direktno na koži krvne sudove. Ovaj uređaj se koristi za vizuelizaciju i lokalizaciju krvnih sudova prilikom intravenskih intervencija.

Ovi sistemi su još uvek u razvoju, ali njihova ubrzana primena u raznim oblastima ukazuje da je najverovatnije, po mišljenju Autora ovog udžbenika, da će ovi sistemi predstavljati buduću važnu oblast merenja.

LITERATURA

1. 4-wire and 8-wire resistive touch-screen controller using the MSP130, Texas Instruments, Application report, 2010, <http://www.ti.com/lit/an/slaa384a/slaa384a.pdf>, pristupljeno januara 2016. godine.
2. Agnihotri N. Diodes, Engineers Garage, <http://www.engineersgarage.com/tutorials/diodes>, pristupljeno januara 2016. godine.
3. Basic concepts: Getting started with OpenChoice solutions, Tektronix, <http://www.testequity.com/documents/pdf/manuals/OpenChoice-M.pdf>, pristupljeno marta 2016.
4. Baxter L.K. Capacitive sensors, 2000, <http://www.capsense.com/capsense-wp.pdf>, pristupljeno januara 2016. godine.
5. Beckhoff information system, RTD Technology, http://infosys.beckhoff.com/espanol.php?content=../content/1034/el320x/html/bt_rtd_technology.htm&id=, pristupljeno januara 2016. godine.
6. Bonanni L. Living with hyper-reality, MIT Media Laboratory, Ambient intelligence in everyday life, LNAI 3864, Y. Cai and J. Abascal (Eds.), pp. 130-141, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
7. DC metering circuits, Lessons in electric circuits, Volume I, Chapter 8, 2000-2015, by Tony R. Kuphaldt, https://www.ibiblio.org/kuphaldt/electricCircuits/DC/DC_8.html, pristupljeno januara 2016. godine.
8. Digital multimeter dial, Fluke, <http://en-us.fluke.com/training/training-library/test-tools/digital-multimeters/digital-multimeter-dial.html>, pristupljeno januara 2016. godine.
9. [Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement](#), JGCM 100:2008, GUM 1995 with minor corrections.
10. Halaki M., Ginn K. Normalization of EMG signals: To normalize or not ot normalize and what to normalize to?, Chapter 7, Computational Intelligence in Electromyography Analysis - A Perspective on Current Applications and Future Challenges, Dr. Ganesh R. Naik (Ed.), ISBN: 978-953-51-0805-4, InTech, DOI: 10.5772/49957, 2012.
11. Hall R.S., Desmoulin G.T., Milner T.E. A technique for conditioning and calibrating force-sensing resistors for repeatable and reliable measurement of compressive force, Journal of biomechanics, 41(16): 3492-5, 2008.
12. Hollinger A., Wanderley M.M. Evaluation of commercial force-sensing resistors, In Proceedings of International Conference on New Interfaces for Musical Expression, 2006.
13. Home built laser projector 2004-2006, http://elm-chan.org/works/vlp/report_e.html, pristupljeno februara 2016. godine
14. Honda M. The Impedance measurement handbook, A guide to measurement technology and techniques, Yokagawa-Hewlett-Packard LTD., 1994.
15. How to build continuity tester circuit, Learning about electronics, <http://www.learningaboutelectronics.com/Articles/Continuity-tester-circuit.php>, pristupljeno marta 2016. godine.

16. How to determine digital multimeter accuracy, Design World, <http://www.designworldonline.com/how-to-determine-digital-multimeter-accuracy/>, pristupljeno januara 2016.
17. How to test diodes using a digital multimeter, Fluke, <http://en-us.fluke.com/training/training-library/test-tools/digital-multimeters/how-to-test-diodes-using-a-digital-multimeter.html>, pristupljeno januara 2016. godine.
18. Hughes J.M. [Real world instrumentation with Python](#), Julie Steele (Ed.), ISBN: 978-0-596-80956-0, 2011.
19. Impedance measurement handbook (A guide to measurement technology and techniques), 5th Edition, Keysight Technologies, 2015, <http://literature.cdn.keysight.com/litweb/pdf/5950-3000.pdf>, pristupljeno aprila 2016. godine.
20. Jovanović V.Đ. Osnovna električna merenja, Univerzitet u Beogradu, Izdavačko preduzeće: Građevinska knjiga, Beograd, 1964.
21. Kovačević B.D., Đurović Ž.M. Sistemi automatskog upravljanja, Akademska misao, 2006.
22. Laser scanners, Zamisel, <http://www.zamisel.com/SSpostavka2.html>, pristupljeno februara 2016. godine.
23. Miljković N. Metode i instrumentacija za procenu aktivnosti motornog sistema na osnovu elektromiografskih signala, doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet, pp. 1-122, 2013.
24. Moving coil meters article, Explain that stuff, <http://www.explainthatstuff.com/movingcoilometers.html>, pristupljeno januara 2016. godine.
25. Moving iron instruments - Voltmeter and ammeter, Electrical engineering portal, <http://electrical-engineering-portal.com/moving-iron-instruments-voltmeter-and-ammeter>, pristupljeno januara 2016. godine.
26. Northrop R.B. Introduction to instrumentation and measurements, 2nd Ed., Taylor & Francis Group, LLC, 2005.
27. Osmokrović P., Stanković K., Vujisić M. Merna nesigurnost, Akademska misao, Beograd, 2009.
28. Pejović P., [Princip rada i primena osciloskopa](#), Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet, 2015.
29. Petrović F.K. Električna merenja, Naučna knjiga, Beograd, 1986.
30. Petrović F.K. Električna merenja: Drugi deo, Naučna knjiga, Beograd, 1989.
31. Reitinger B., Bornik A., Beichel R., Werkgartner G., Sorantin E. Augmented reality based measurement tools for liver surgery planning, *Bildverarbeitung für die Medizin 2004*. Springer Berlin Heidelberg, pp. 274-278, 2004.
32. Resistor & types of resistors, Electrical Technology, <http://www.electricaltechnology.org/2015/01/resistor-types-resistors-fixed-variable-linear-non-linear.html>, pristupljeno januara 2016.
33. Spellman High Voltage Electronics Co., AN-15, <http://www.spellmanhv.com/en/Technical-Resources/Application-Notes/AN-15.aspx>, pristupljeno januara 2016.
34. Stanković D. O mernoj nesigurnosti, Zbornik radova XLVI Konferencije za ETRAN, Banja Vrućica - Teslić, 4-7 jun, 3:243-255, 2002.
35. Stanković D.K. Fizičko tehnička merenja: Senzori, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1997.

36. Stouffer K., Falco J., Kent K. Guide to supervisory control and data acquisition (SCADA) and industrial control systems security - Recommendations of the National Institute of Standards and Technology, Special Publication 800-82, Initial public draft, 2006. Retrieved from: <https://www.dhs.gov/sites/default/files/publications/csd-nist-guidetosupervisoryanddataacquisition-scadaandindustrialcontrolsystemssecurity-2007.pdf> on January 2016.
37. Swaminathan R., Schleicher R., Burkard S., Agurto R., Koleczko S. Happy measure: Augmented reality for mobile virtual furnishing, International Journal of Mobile Human Computer Interaction, 5(1):16-44, 2013.
38. The NIST reference on constants, units, and uncertainty: Evaluating uncertainty components: Type B, <http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/typeb.html>, pristupljeno januara 2016.
39. Trainer M. Demonstrating electrical principles using LCR meter, Special Feature: Practical Physics, Physics Education 36(2): 119-120, 2001.
40. Tumanski S. Principles of electrical measurement, Series in Sensors, Taylor & Francis Group, LLC, 2006.
41. User interface design basics, U.S. Department of Health & Human Services, <http://www.usability.gov/what-and-why/user-interface-design.html>, pristupljeno februara 2016. godine.
42. Virtual Instrumentation: whitepaper, National Instruments Inc., 2013, <http://www.ni.com/white-paper/4752/en/>, pristupljeno januara 2016. godine.
43. Walker G. Fundamentals of projected capacitive touch technology, Intel Cooperation, http://www.walkermobile.com/Touch_Technologies_Tutorial_Latest_Version.pdf, pristupljeno januara 2016. godine.